

Approfondissements de Terminale

Cette page rassemble les **notions de bordure** du programme officiel : celles qui ne méritent pas un chapitre entier mais qui peuvent tomber dans un sujet, souvent comme **question de fin d'exercice** ou en exercice de recherche. Chaque section tient en un rappel, un exemple et un exercice corrigé.

Au programme

- Suites adjacentes
- Récurrence linéaire d'ordre 2
- Limite de $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
- Fonctions puissances $x \mapsto x^a$
- Fonction tangente
- Loi géométrique
- Barycentre

1. Suites adjacentes

Définition. Deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $v_n - u_n \rightarrow 0$.

Théorème. Deux suites adjacentes **convergent vers la même limite** ℓ , et $u_n \leq \ell \leq v_n$ pour tout n .

Astuce. Les suites adjacentes servent à **encadrer** une limite sans la connaître : on obtient une précision $v_n - u_n$ connue d'avance.

Exercice 1 (★★★) : suites adjacentes

On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. Montrer que (v_n) est décroissante.
3. Conclure que les deux suites convergent vers une même limite. Donner un encadrement avec $n = 100$.

Correction de l'exercice 1

Question 1

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

(u_n) est strictement croissante.

Question 2

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$. On réduit au dénominateur $n(n+1)^2$: le numérateur vaut $n + n(n+1) - (n+1)^2 = -1$.

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0 : (v_n) \text{ est décroissante.}$$

Question 3

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 : \text{les suites sont adjacentes.}$$

Elles convergent vers une même limite ℓ et $u_{100} \leq \ell \leq v_{100}$, soit un encadrement d'amplitude 0,01.

(Cette limite vaut en réalité $\frac{\pi^2}{6}$, résultat dû à Euler.)

2. Récurrence linéaire d'ordre 2

Méthode. Pour $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$, on cherche des suites géométriques r^n : il faut $r^2 = ar + b$ (**équation caractéristique**). Si elle a deux racines distinctes r_1 et r_2 , alors $u_n = A r_1^n + B r_2^n$ avec A et B déterminés par u_0 et u_1 .

Exercice 2 (★★★) : récurrence d'ordre 2

On pose $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

1. Résoudre $r^2 = 5r - 6$.
2. Déterminer A et B tels que $u_n = A r_1^n + B r_2^n$.
3. Démontrer par récurrence que $u_n = 3^n - 2^n$ pour tout n .

Correction de l'exercice 2

Question 1

$$r^2 - 5r + 6 = 0 : \Delta = 1, \text{ donc } r = 2 \text{ ou } r = 3.$$

Question 2

$$u_0 = A + B = 0 \text{ et } u_1 = 2A + 3B = 1. \text{ On trouve } B = 1 \text{ puis } A = -1.$$

$$u_n = 3^n - 2^n.$$

Question 3

On démontre la propriété pour **deux rangs consécutifs** à la fois.

Initialisation : $u_0 = 3^0 - 2^0 = 0$ et $u_1 = 3 - 2 = 1$.

Hérédité : si $u_n = 3^n - 2^n$ et $u_{n+1} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$, alors $u_{n+2} = 5(3^{n+1} - 2^{n+1}) - 6(3^n - 2^n) = 3^n(15 - 6) - 2^n(10 - 6) = 9 \times 3^n - 4 \times 2^n = 3^{n+2} - 2^{n+2}$.

La propriété est vraie pour tout n .

Astuce. La même méthode donne la formule de Binet pour Fibonacci : $r^2 = r + 1$ a pour racines $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, et le nombre d'or apparaît.

3. Limite de $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

Propriété. Pour tout réel x , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

Idée de la preuve ($x \neq 0$). $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{x}{n})}$. Avec $h = \frac{x}{n} \rightarrow 0$: $n \ln(1 + h) = x \times \frac{\ln(1 + h)}{h} \rightarrow x \times 1$ (nombre dérivé de $\ln$ en 1), puis on compose avec l'exponentielle.

Exercice 3 (★★) : limite en e^x

1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$.

2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

3. Application : un capital est placé à 4 % par an avec capitalisation n fois par an. Quel est le facteur multiplicatif au bout d'un an quand $n \rightarrow +\infty$?

Correction de l'exercice 3

Question 1

Avec $x = 2$: la limite est e^2 .

Question 2

$1 - \frac{1}{n} = 1 + \frac{-1}{n}$ donc $x = -1$.

La limite est $e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,368$.

Question 3

Le facteur est $\left(1 + \frac{0,04}{n}\right)^n \rightarrow e^{0,04} \approx 1,0408$.

Le rendement maximal est d'environ 4,08 %, contre 4 % sans capitalisation fractionnée : c'est la capitalisation **continue**.

4. Fonctions puissances $x \mapsto x^a$

Définition. Pour $x > 0$ et a réel quelconque, $x^a = e^{a \ln x}$.

- C'est cohérent avec les puissances entières et $x^{1/2} = \sqrt{x}$.
- **Dérivée** : $(x^a)' = a x^{a-1}$.
- Les règles $x^{a+b} = x^a x^b$ et $(x^a)^b = x^{ab}$ restent valables.

Exercice 4 (★★★) : étude de $x \mapsto x^x$

Soit $f(x) = x^x$ pour $x > 0$.

1. Écrire $f(x)$ avec l'exponentielle puis calculer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Correction de l'exercice 4

Question 1

$$f(x) = e^{x \ln x} \text{ donc } f'(x) = \left(\ln x + x \times \frac{1}{x} \right) e^{x \ln x}.$$

$$f'(x) = (1 + \ln x) x^x.$$

Question 2

$x^x > 0$: le signe de f' est celui de $1 + \ln x$, qui s'annule en $x = \frac{1}{e}$.

Donc f' est **négative** sur $]0; \frac{1}{e}[$ et **positive** sur $]\frac{1}{e}; +\infty[$: f est décroissante puis croissante.

Le minimum vaut $f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-1/e} \approx 0,692$.

Question 3

Par croissances comparées, $x \ln x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Donc $f(x) = e^{x \ln x} \rightarrow e^0 = 1$.

5. La fonction tangente

Pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, on pose $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

- $\tan$ est π -périodique et impaire.
- Elle est dérivable et $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$: elle est **strictement croissante** sur chaque intervalle $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$.
- $\tan x$ est le **coefficient directeur** de la droite (OM) , où M est le point du cercle trigonométrique associé à x .
- Valeurs : $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercice 5 (★★) : tangente

1. Démontrer que $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
2. Résoudre $\tan x = 1$ dans $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$ puis dans $\mathbb{R}$.
3. Donner l'équation de la tangente à la courbe de $\tan$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 5

Question 1

Avec $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $u = \sin$ et $v = \cos$: $\tan'(x) = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$.

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Question 2

Sur cet intervalle, $\tan$ est strictement croissante donc $\tan x = 1$ a au plus une solution : $\frac{\pi}{4}$.

Dans $\mathbb{R}$: $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$ (période π).

Question 3

$$\tan \frac{\pi}{4} = 1 \text{ et } \tan' \left(\frac{\pi}{4} \right) = 1 + 1^2 = 2.$$

$$y = 1 + 2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right).$$

Piège. $\tan$ n'est pas définie en $\frac{\pi}{2} + k\pi$. Dans une équation $\tan x = a$, pense à ces valeurs exclues et à la période π (et non 2π).

6. Loi géométrique

On répète des épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès p . Soit X le rang du premier succès. Alors :

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p \quad (k \geq 1), \quad P(X \leq k) = 1 - (1 - p)^k, \quad E(X) = \frac{1}{p}.$$

On dit que X suit la loi géométrique de paramètre p .

Exercice 6 (★★) : premier six

On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un 6. X est le nombre de lancers.

1. Donner la loi de X puis calculer $P(X = 3)$.
2. Calculer $P(X \leq 4)$.
3. Combien de lancers faut-il en moyenne ?

Correction de l'exercice 6

Question 1

Les lancers sont indépendants et $p = \frac{1}{6}$.

$$P(X = 3) = \left(\frac{5}{6} \right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}.$$

$$P(X = 3) \approx 0,116.$$

Question 2

$$P(X \leq 4) = 1 - P(X > 4) = 1 - \left(\frac{5}{6} \right)^4 = 1 - \frac{625}{1296}.$$

$$P(X \leq 4) = \frac{671}{1296} \approx 0,518.$$

Question 3

$$E(X) = \frac{1}{p} = 6 \text{ lancers en moyenne.}$$

7. Barycentre

Soit A et B deux points, a et b deux réels tels que $a + b \neq 0$. Le **barycentre** G de (A, a) et (B, b) est l'unique point tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}.$$

Ses coordonnées sont $\left(\frac{ax_A + bx_B}{a+b}; \frac{ay_A + by_B}{a+b}; \frac{az_A + bz_B}{a+b} \right)$. Avec des poids égaux, c'est l'**isobarycentre** (milieu pour deux points, centre de gravité pour un triangle).

Exercice 7 (★★) : barycentres dans l'espace

Dans un repère de l'espace, $A(1; 2; 0)$, $B(7; -4; 3)$ et $C(0; 3; 3)$ avec $O(0; 0; 0)$.

- Déterminer les coordonnées du barycentre G de $(A, 2)$ et $(B, 1)$. Que peut-on dire de G sur $[AB]$?
- Déterminer l'isobarycentre K des points O , B et C .

Correction de l'exercice 7

Question 1

$$a + b = 3. \quad x_G = \frac{2 \times 1 + 7}{3} = 3, \quad y_G = \frac{2 \times 2 - 4}{3} = 0, \quad z_G = \frac{0 + 3}{3} = 1.$$

$G(3; 0; 1)$. Comme $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$, G est au **tiers** de $[AB]$ en partant de A (le plus proche du point le plus lourd).

Question 2

$$x_K = \frac{0 + 7 + 0}{3} = \frac{7}{3}, \quad y_K = \frac{0 - 4 + 3}{3} = -\frac{1}{3}, \quad z_K = \frac{0 + 3 + 3}{3} = 2.$$

$$K\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; 2\right).$$

À retenir

- **Suites adjacentes** : même limite et encadrement.
- **Ordre 2** : équation caractéristique puis récurrence sur deux rangs.
- $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^x$.
- $x^a = e^{a \ln x}$, dérivée $a x^{a-1}$.
- $\tan' = 1 + \tan^2$, période π .
- **Loi géométrique** : $P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$, $E(X) = \frac{1}{p}$.
- **Barycentre** : $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$.

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Deux suites adjacentes :

- A. ont la même limite (**bonne réponse**)
- B. ont des limites opposées
- C. sont toutes deux croissantes
- D. divergent

Justification : Elles convergent vers une même limite.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n =$

- A. 3
- B. e^3 (**bonne réponse**)
- C. e
- D. $+\infty$

Justification : On applique $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^x$ avec $x = 3$.

3. Pour $x > 0$, $x^{1/3}$ est égal à :

- A. $e^{3 \ln x}$
- B. $e^{\frac{1}{3} \ln x}$ (**bonne réponse**)
- C. $\frac{1}{\ln x}$
- D. $\ln(x^3)$

Justification : $x^a = e^{a \ln x}$ avec $a = \frac{1}{3}$.

4. La dérivée de **tan** est :

- A. $\cos^2$
- B. $1 + \tan^2$ (**bonne réponse**)

C. $-\frac{1}{\sin^2}$

D. $\frac{1}{\sin^2}$

Justification : $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.

5. La période de $\tan$ est :

A. 2π

B. π (bonne réponse)

C. $\frac{\pi}{2}$

D. elle n'est pas périodique

Justification : $\tan(x + \pi) = \tan x$.

6. Loi géométrique de paramètre $p = 0,25$: l'espérance vaut :

A. 0,25

B. 2

C. 4 (bonne réponse)

D. 0,75

Justification : $E(X) = \frac{1}{p} = 4$.

7. Le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 3)$ vérifie :

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

B. $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ (bonne réponse)

C. $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB}$

D. G est le milieu de $[AB]$

Justification : $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.