

Guide de rédaction : dénombrement

Ce guide complète le Guide de rédaction général.

Il rassemble, pour le chapitre Dénombrement, **les quatorze situations qui reviennent au bac** et, pour chacune, la rédaction modèle.

Dans ce chapitre, un résultat numérique seul ne vaut presque rien.

Le correcteur note surtout **le raisonnement expliqué en français** : le modèle, les choix successifs, les cas.

Le principe du chapitre

Avec le dénombrement, un correcteur regarde surtout **cinq choses** :

- le **modèle nommé** (avec ou sans ordre, avec ou sans répétition) ;
- la **justification de chaque facteur** d'un produit ;
- les **cas disjoints** bien séparés ;
- l'usage du **complémentaire** pour « au moins un » ;
- en probabilités, la **description de Ω** et de l'équiprobabilité.

1. Les quatorze situations et leur rédaction modèle

Situation 1 : le principe multiplicatif.

« On choisit successivement :

- l'entrée (**3** possibilités) ;
- le plat (**4**) ;
- le dessert (**2**).

Chaque choix ne dépend pas des précédents. D'après le principe multiplicatif, il y a $3 \times 4 \times 2 = 24$ menus. »

Nomme le principe et écris « successivement ».

Situation 2 : le principe additif (cas disjoints).

« On sépare deux cas disjoints :

- exactement 3 filles ;
- exactement 4 filles.

Le nombre de comités est la somme : $\binom{18}{3} \times \binom{12}{1} + \binom{18}{4} = 9\,792 + 3\,060 = 12\,852$. »

Vérifie que les cas sont **disjoints** et qu'ils **couvrent tout**.

Situation 3 : les k -uplets (avec répétition).

« Un code est une suite ordonnée de 4 chiffres pouvant se répéter. C'est un 4-uplet d'éléments d'un ensemble à 10 éléments. Il y a $10^4 = 10\,000$ codes. »

Situation 4 : les k -uplets d'éléments distincts.

« Un podium est une suite ordonnée de 3 coureurs distincts parmi 8. Il y a 8 choix pour le premier, 7 pour le deuxième, 6 pour le troisième. $8 \times 7 \times 6 = 336$ podiums. »

Situation 5 : les permutations.

« Une file est un ordre sur 6 personnes distinctes : il y en a $6! = 720$.

Pour A et B côte à côte, on forme un bloc.

On permute 5 objets : $5!$ façons.

Dans le bloc, il y a 2 ordres. $5! \times 2 = 240$. »

Situation 6 : les combinaisons.

« On tire simultanément 4 boules parmi 12 :

- l'ordre ne compte pas ;
- il n'y a pas de répétition.

Un tirage est une partie à 4 éléments d'un ensemble à 12 éléments. Il y en a $\binom{12}{4} = 495$. »

Écris « **sans ordre, sans répétition** » pour justifier la combinaison.

Situation 7 : une composition imposée.

« Pour avoir exactement 2 boules rouges :

- on choisit 2 boules rouges parmi 4 : $\binom{4}{2} = 6$ façons ;
- puis 2 boules parmi les 8 non rouges : $\binom{8}{2} = 28$ façons.

D'après le principe multiplicatif, il y a $6 \times 28 = 168$ tirages. »

Situation 8 : « au moins un » (complémentaire).

« L'événement contraire de « au moins une jaune » est « aucune jaune ».

Ce sont 4 boules parmi les 7 non jaunes : $\binom{7}{4} = 35$ tirages.

Donc il y a $495 - 35 = 460$ tirages avec au moins une jaune. »

Écris bien l'événement contraire avec ses mots.

Situation 9 : former un nombre avec des contraintes.

« Le premier chiffre est non nul : 9 choix.

Le deuxième diffère du premier (0 est possible) : 9 choix.

Le troisième diffère des deux premiers : 8 choix.

Il y a $9 \times 9 \times 8 = 648$ nombres. »

Commence par la contrainte la plus forte (premier chiffre, dernier chiffre pair...).

Situation 10 : les chemins sur un quadrillage.

« Un chemin de (0,0) à (5,3) est une suite de 8 pas, dont 5 vers la droite et 3 vers le haut. Il est déterminé par le choix des 3 positions des pas « haut » parmi les 8. $\binom{8}{3} = 56$. »

Situation 11 : les anagrammes.

« ANANAS a 6 lettres : 3 A, 2 N, 1 S.

On choisit les 3 places des A parmi 6 : $\binom{6}{3} = 20$.

Puis les 2 places des N parmi les 3 restantes : $\binom{3}{2} = 3$.

Le S occupe la dernière place.

Il y a $20 \times 3 = 60$ anagrammes. »

Situation 12 : une probabilité par dénombrement.

« Ω est l'ensemble des parties à 5 éléments d'un ensemble de 32 cartes. $|\Omega| = \binom{32}{5} = 201\,376$.

Le tirage est fait au hasard : les issues sont équiprobables.

Soit A : « exactement 2 cœurs ». $|A| = \binom{8}{2} \times \binom{24}{3} = 56\,672$. $P(A) = \frac{56\,672}{201\,376} = \frac{253}{899} \approx 0,281$. »

Situation 13 : une identité par double comptage.

« Comptons de deux façons l'ensemble des comités munis d'un président parmi n personnes.

Première façon : on choisit le comité de k membres, puis son président : $\sum k \binom{n}{k}$.

Seconde façon : on choisit d'abord le président (n façons). Puis on décide pour chacun des $n - 1$ autres s'il est dans le comité (2^{n-1} façons).

Donc $\sum k \binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}$. »

Commence par définir l'ensemble que tu comptes.

Situation 14 : vérifier avec Python.

« Le script parcourt les 10^3 triplets avec `itertools.product`. Il compte ceux qui ont trois chiffres distincts. Il affiche **720**, ce qui coïncide avec $10 \times 9 \times 8$. »

Un test **vérifie** un résultat, il ne le **démontre** pas.

2. Avant / après sur le dénombrement**a) Un dénombrement de tirage.**

« $\binom{12}{4} = 495$. »

« On tire 4 boules simultanément parmi 12 : sans ordre, sans répétition. Il y a $\binom{12}{4} = 495$ tirages. »

La première ne dit pas pourquoi une combinaison.

b) « Au moins un ».

« $495 - 35 = 460$. »

« Le contraire de « au moins une jaune » est « aucune jaune » : $\binom{7}{4} = 35$ tirages. Donc $495 - 35 = 460$ tirages ont au moins une jaune. »

c) Une probabilité.

$$\ll P = \frac{168}{495} \gg$$

« Les boules étant indiscernables au toucher, les 495 tirages sont équiprobables. $|A| = \binom{4}{2} \times \binom{8}{2} = 168$. $P(A) = \frac{168}{495} = \frac{56}{165} \approx 0,339$. »

d) Une composition.

$$\ll \binom{8}{3} + \binom{24}{2} \gg$$

« On choisit 3 cœurs ($\binom{8}{3}$ façons) puis 2 autres cartes ($\binom{24}{2}$ façons). On multiplie : $\binom{8}{3} \times \binom{24}{2}$. »

La première a additionné deux choix successifs : « et » se traduit par $\times$.

3. Les erreurs de rédaction propres à ce chapitre

- Donner un **résultat sans modèle** (avec ou sans ordre, avec ou sans répétition).
- **Additionner au lieu de multiplier** deux choix successifs, ou l'inverse.
- Séparer des cas qui ne sont **pas disjoints**.
- Oublier une **contrainte** (premier chiffre non nul, lettres distinctes).
- Ne pas écrire l'**événement contraire** avec ses mots.
- Dénombrer Ω et A avec **des modèles différents**.
- Ne pas justifier l'**équiprobabilité**.
- Une preuve par dénombrement **sans définir l'ensemble compté**.

4. La check-list du chapitre Dénombrement

- J'ai écrit le **modèle** : ordre ? répétition ? simultané ou successif ?
- Chaque facteur de mon produit est **justifié** par un choix.
- Mes cas sont **disjoints** et je n'en ai oublié aucun.
- Pour « au moins un », j'ai écrit l'**événement contraire**.
- J'ai pensé à **toutes les contraintes** de l'énoncé.
- Pour une probabilité, j'ai décrit Ω , justifié l'**équiprobabilité**, et gardé le **même modèle** partout.
- Ma fraction est **simplifiée** et j'ai donné une **valeur approchée**.
- J'ai **vérifié** avec un petit cas ou Python, si le temps le permet.

Un dénombrement sans explication, c'est un chèque sans signature : la somme est peut-être bonne, mais la banque ne l'accepte pas.