

Dénombrement

Nom : _____

Fiche Standard

Date : _____

Exercice S1 : Nombres à chiffres distincts

On forme des nombres de 4 chiffres (le premier chiffre est non nul) dont les chiffres sont deux à deux distincts.

1. Combien de tels nombres existe-t-il ?
2. Combien sont pairs ? (Distinguer deux cas selon le chiffre des unités.) En déduire le nombre de nombres impairs et retrouver ce résultat par un calcul direct.
3. Combien sont divisibles par 5 ?
4. Combien sont strictement supérieurs à 5 000 ?

Exercice S2 : Comités et contraintes

Un conseil comprend 15 membres : 9 hommes et 6 femmes. On forme un comité de 5 personnes. Parmi les membres figurent M. Perrin et Mme Lopez.

1. Combien de comités sont possibles ?
2. Combien comportent exactement 2 femmes ?
3. Combien comportent au moins une femme ?
4. Combien comportent au plus 2 femmes ?
5. M. Perrin et Mme Lopez refusent de siéger ensemble dans le comité. Combien de comités sont alors possibles ?

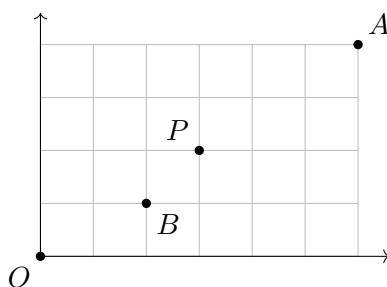
Exercice S3 : Anagrammes

On appelle anagramme d'un mot toute suite des lettres de ce mot, ayant un sens ou non. Le mot MISSISSIPPI comporte 11 lettres : 1 M, 4 I, 4 S et 2 P.

1. Combien d'anagrammes de MISSISSIPPI existe-t-il ? (Choisir successivement les places de chaque lettre.)
2. Combien commencent par la lettre M ?
3. Combien comportent les quatre lettres I consécutives (à la suite les unes des autres) ?

Exercice S4 : Chemins sur un quadrillage

Dans un repère, on considère les chemins allant de $O(0; 0)$ à $A(6; 4)$ formés de pas d'une unité vers la droite ou vers le haut. On note $B(2; 1)$ et $P(3; 2)$.



1. Montrer qu'il y a 210 chemins de O à A .
2. Combien de chemins passent par B ?
3. Combien de chemins ne passent pas par P ?
4. On choisit un chemin au hasard parmi les 210, tous équiprobables. Quelle est la probabilité qu'il passe par P ? On donnera une fraction irréductible.

Exercice S5 : Mains de poker

On tire simultanément et au hasard 5 cartes dans un jeu de 32 cartes (4 couleurs : cœur, carreau, trèfle,

poque; 8 hauteurs : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as).

1. Justifier l'équiprobabilité et donner le nombre de mains possibles.
2. Calculer la probabilité d'obtenir exactement un as. On donnera une fraction irréductible, puis une valeur approchée à 10^{-3} près.
3. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un as (valeur approchée à 10^{-3} près).
4. Un « full » est une main formée de trois cartes de même hauteur et de deux cartes d'une autre hauteur (elles aussi de même hauteur). Calculer sa probabilité.
5. Calculer la probabilité d'obtenir cinq cartes de la même couleur.

Exercice S6 : Un script de dénombrement

On considère le script suivant.

```
from itertools import product
compte = 0
for mot in product("ABC", repeat=5):
    ok = True
    for i in range(4):
        if mot[i] == mot[i + 1]:
            ok = False
    if ok:
        compte = compte + 1
print(compte)
```

1. Quels objets ce script énumère-t-il, et que compte-t-il ?
2. Déterminer par le calcul la valeur affichée.
3. Modifier le script pour compter les mots qui contiennent au moins une fois la lettre A. Prévoir par le calcul la valeur affichée (utiliser le complémentaire).
4. Combien de mots de 10 lettres sur $\{A; B; C\}$ n'ont pas deux lettres consécutives identiques ?

Exercice S7 : Équations avec des coefficients binomiaux

1. Résoudre dans $\mathbb{N}$, avec $n \geq 2$: $\binom{n}{2} = 78$.
2. Résoudre dans $\mathbb{N}$, avec $n \geq 3$: $\frac{n!}{(n-3)!} = 210$.
3. Résoudre dans $\mathbb{N}$, avec $n \geq 3$: $\binom{n}{3} = 2\binom{n}{2}$.
4. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = n^2$.

Exercice S8 : Somme de coefficients binomiaux

On souhaite démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

1. Vérifier cette égalité pour $n = 7$.
2. Montrer, grâce à la relation de Pascal, que pour tout entier $j \geq 3$: $\binom{j}{2} = \binom{j+1}{3} - \binom{j}{3}$.
3. En déduire l'égalité pour $n \geq 3$ en écrivant la somme sous la forme $\binom{2}{2} + \sum_{j=3}^n \binom{j}{2}$. Que dire du cas $n = 2$?
4. Calculer $1 + 3 + 6 + 10 + \dots + 190$, où les termes sont les $\binom{j}{2}$ pour j de 2 à 20.

Exercice S9 : Un QCM rempli au hasard

Un QCM comporte 10 questions. Pour chaque question, 4 réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Un élève répond au hasard, indépendamment d'une question à l'autre. Une grille de réponses est une suite de 10 réponses (une par question). On admet que les grilles sont équiprobables.

1. Combien de grilles de réponses existe-t-il ?
2. Calculer la probabilité d'avoir exactement 3 bonnes réponses (fraction irréductible, puis valeur approchée à 10^{-3} près).
3. Calculer la probabilité de n'avoir aucune bonne réponse, puis au moins une bonne réponse (valeurs approchées à 10^{-3} près).
4. Calculer la probabilité d'avoir au moins 8 bonnes réponses.

Exercice S10 : Tirages successifs

Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules noires, indiscernables au toucher. On tire successivement 3 boules.

1. Les tirages se font sans remise. Décrire l'ensemble Ω des tirages possibles et donner son cardinal. Calculer la probabilité de tirer 3 boules rouges, puis celle de tirer exactement 2 boules rouges.
2. Retrouver la probabilité de la dernière question en considérant un tirage simultané de 3 boules. Pourquoi les deux modèles donnent-ils le même résultat ?
3. Calculer la probabilité de tirer au moins une boule rouge (sans remise).
4. Les tirages se font maintenant avec remise. Calculer la probabilité de tirer exactement 2 boules rouges.
5. On numérote les boules de 0 à 9, les boules rouges portant les numéros 0 à 5. Compléter le script pour compter les tirages sans remise comportant exactement 2 boules rouges ; donner la valeur affichée.

```
from itertools import permutations
compte = 0
for t in permutations(range(10), 3):
    rouges = [b for b in t if b < 6]
    if ...:
        compte = compte + 1
print(compte)
```

Exercice S11 : Arbre, mots et succession d'épreuves de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli a deux issues : succès (S) ou échec (E). On la répète n fois et on note l'issue de l'expérience sous la forme d'un mot de n lettres sur $\{S; E\}$ (par exemple SES pour $n = 3$), c'est-à-dire d'un élément de $\{S; E\}^n$.

1. Pour $n = 3$, représenter les issues par un arbre. Combien de chemins comporte-t-il ? Quel lien avec les triplets de $\{0; 1\}^3$ en codant S par 1 et E par 0 ?
2. Pour $n = 3$, lister les chemins de l'arbre comportant exactement 2 succès. À chacun, associer la partie de $\{1; 2; 3\}$ formée des rangs des succès. Quel coefficient binomial retrouve-t-on ?
3. Pour $n = 4$, donner pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$ le nombre d'issues comportant exactement k succès (justifier à l'aide de combinaisons). Vérifier que la somme de ces nombres vaut 2^4 .
4. Pour $n = 6$, dénombrer les issues comportant :
 - a) exactement 2 succès ;
 - b) exactement 2 succès consécutifs (deux succès aux rangs i et $i + 1$) ;
 - c) exactement 2 succès non consécutifs ;
 - d) au plus 1 succès.

Exercice S12 : Permutations : génération et tirage aléatoire

1. On considère la fonction suivante.

```
def permutations(L):
    if len(L) <= 1:
        return [L]
    res = []
    for i in range(len(L)):
        reste = L[:i] + L[i + 1:]
        for p in permutations(reste):
            res.append([L[i]] + p)
    return res
```

- a) Écrire la liste renvoyée par `permutations([1, 2, 3])`.
- b) Si L possède $n \geq 1$ éléments, la fonction fait appel à elle-même pour chacun des n choix de $L[i]$. En déduire le nombre d'éléments de la liste renvoyée, puis l'affichage de `len(permutations([1, 2, 3, 4]))`.
2. On souhaite tirer au hasard une permutation d'une liste, avec la fonction suivante.

```
from random import randint
def melange(L):
    L = L[:]
    for i in range(len(L) - 1, 0, -1):
        j = randint(0, i)
        L[i], L[j] = L[j], L[i]
    return L
```

À chaque exécution, l'indice j est choisi de façon équiprobable parmi $0, 1, \dots, i$.

- a) Pour $L = ['a', 'b', 'c']$, la suite des valeurs de j est un couple $(j_2; j_1) \in \{0; 1; 2\} \times \{0; 1\}$. Dresser le tableau des 6 couples possibles et de la liste obtenue dans chaque cas. Que constate-t-on ?
- b) Pour une liste de n éléments, combien de suites de choix de j sont possibles ? Quelle est la probabilité de chacune ?
- c) On admet que deux suites de choix différentes donnent deux listes différentes. Justifier que `melange` renvoie chacune des $n!$ permutations avec la probabilité $\frac{1}{n!}$.
- d) On applique `melange` à $[1, 2, 3, 4, 5]$. Calculer la probabilité que le résultat commence par 1.