

Corrigé : Dénombrement**Fiche Standard****S1.**

- On choisit successivement les chiffres en commençant par la contrainte la plus forte : le premier est non nul (9 choix), le deuxième diffère du premier (0 est possible : 9 choix), le troisième diffère des deux premiers (8 choix), le quatrième des trois premiers (7 choix). Il y a $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4\,536$ nombres.
- Deux cas disjoints selon le chiffre des unités.
Unités égal à 0 : le premier chiffre a 9 choix, le deuxième 8, le troisième 7 : $9 \times 8 \times 7 = 504$.
Unités égal à 2, 4, 6 ou 8 (4 choix) : le premier chiffre est non nul et différent des unités (8 choix), le deuxième diffère de ces deux chiffres (8 choix, 0 possible), le troisième (7 choix) : $4 \times 8 \times 8 \times 7 = 1\,792$.
Total : $504 + 1\,792 = 2\,296$ nombres pairs.
Impairs : $4\,536 - 2\,296 = 2\,240$. Calcul direct : unités dans $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (5 choix), premier chiffre non nul et différent (8 choix), puis 8 et 7 choix : $5 \times 8 \times 8 \times 7 = 2\,240$. Les deux résultats coïncident.
- Cas disjoints. Unités égal à 0 : 504 nombres. Unités égal à 5 : premier chiffre 8 choix, puis 8, puis 7 : 448 nombres. Total : $504 + 448 = 952$.
- Il faut un premier chiffre dans $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ (5 choix), puis $9 \times 8 \times 7 = 504$ façons de choisir les trois autres : $5 \times 504 = 2\,520$. (Le nombre 5 000 n'a pas ses chiffres distincts, la condition « strictement supérieur » n'enlève donc rien.)

Conclusion : 4 536 nombres, dont 2 296 pairs, 952 multiples de 5 et 2 520 supérieurs à 5 000.

S2. Un comité est une partie à 5 éléments de l'ensemble des 15 membres (sans ordre, sans répétition).

- $\binom{15}{5} = 3\,003$ comités.
- On choisit 2 femmes parmi 6 puis 3 hommes parmi 9 : $\binom{6}{2} \times \binom{9}{3} = 15 \times 84 = 1\,260$.
- Le contraire de « au moins une femme » est « aucune femme », c'est-à-dire 5 hommes parmi 9 : $\binom{9}{5} = 126$. Donc $3\,003 - 126 = 2\,877$ comités.
- Trois cas disjoints : 0 femme ($\binom{9}{5} = 126$), 1 femme ($6 \times \binom{9}{4} = 6 \times 126 = 756$), 2 femmes (1 260).
Total : $126 + 756 + 1\,260 = 2\,142$.
- Les comités contenant à la fois M. Perrin et Mme Lopez s'obtiennent en choisissant les 3 autres membres parmi les 13 restants : $\binom{13}{3} = 286$. Les comités autorisés sont les autres : $3\,003 - 286 = 2\,717$.

Conclusion : 3 003 comités, dont 1 260 avec exactement 2 femmes, 2 877 avec au moins une femme, 2 142 avec au plus 2 femmes ; 2 717 avec l'incompatibilité.

S3.

- Une anagramme est déterminée par les places des lettres. On choisit les 4 places des I parmi 11 : $\binom{11}{4} = 330$; puis les 4 places des S parmi les 7 restantes : $\binom{7}{4} = 35$; puis les 2 places des P parmi les 3 restantes : $\binom{3}{2} = 3$; le M occupe la dernière place. Il y a $330 \times 35 \times 3 = 34\,650$ anagrammes.
- Le M occupe la première place. Il reste 10 places : $\binom{10}{4} = 210$ pour les I, $\binom{6}{4} = 15$ pour les S parmi les 6 restantes, $\binom{2}{2} = 1$ pour les P. Total : $210 \times 15 = 3\,150$.
- Les quatre I consécutifs forment un bloc. Une anagramme de ce type correspond à un rangement de 8 objets : le bloc, M, quatre S, deux P. On choisit la place du bloc (8 choix), celle du M (7

choix), les places des S parmi les 6 restantes ($\binom{6}{4} = 15$), les P occupent les 2 dernières places : $8 \times 7 \times 15 = 840$ anagrammes.

Conclusion : 34 650 anagrammes, dont 3 150 commencent par M et 840 ont les quatre I consécutifs.

S4.

1. Un chemin de O à A comporte 10 pas : 6 vers la droite et 4 vers le haut. Il est déterminé par le choix des 4 positions des pas « haut » parmi les 10 : $\binom{10}{4} = 210$ chemins.
2. Un chemin passant par B se décompose en un chemin de O à B (pas : 2 droite, 1 haut : $\binom{3}{1} = 3$ chemins) puis un chemin de B à A (4 droite, 3 haut : $\binom{7}{3} = 35$ chemins). D'après le principe multiplicatif : $3 \times 35 = 105$ chemins.
3. Chemins passant par P : de O à P (3 droite, 2 haut) $\binom{5}{2} = 10$ chemins, de P à A (3 droite, 2 haut) $\binom{5}{2} = 10$ chemins, soit $10 \times 10 = 100$ chemins. Ceux qui ne passent pas par P : $210 - 100 = 110$.
4. Les 210 chemins sont équiprobables, donc $p = \frac{100}{210} = \frac{10}{21}$.

Conclusion : 210 chemins, 105 par B , 110 évitant P , et probabilité $\frac{10}{21}$ de passer par P .

S5.

1. Les cartes sont tirées au hasard : les mains (parties à 5 éléments de l'ensemble des 32 cartes) sont équiprobables. Il y en a $\binom{32}{5} = 201\,376$.
2. On choisit l'as ($\binom{4}{1} = 4$ façons) puis 4 cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as : $4 \times \binom{28}{4} = 4 \times 20\,475 = 81\,900$. Donc

$$P = \frac{81\,900}{201\,376} = \frac{2\,925}{7\,192} \approx 0,407.$$
3. Le contraire de « au moins un as » est « aucun as » : $\binom{28}{5} = 98\,280$ mains. Donc $P = 1 - \frac{98\,280}{201\,376} = \frac{1\,841}{3\,596} \approx 0,512$.
4. On choisit la hauteur du brelan (8 façons) et ses 3 cartes ($\binom{4}{3} = 4$), puis la hauteur de la paire (7 façons) et ses 2 cartes ($\binom{4}{2} = 6$) : $8 \times 4 \times 7 \times 6 = 1\,344$ mains. $P = \frac{1\,344}{201\,376} = \frac{6}{899} \approx 0,007$.
5. On choisit la couleur (4 façons) puis 5 cartes parmi les 8 de cette couleur ($\binom{8}{5} = 56$) : 224 mains.

$$P = \frac{224}{201\,376} = \frac{1}{899} \approx 0,001.$$

S6.

1. Le script énumère les $3^5 = 243$ mots de 5 lettres sur $\{A, B, C\}$ (les 5-uplets de $\{A, B, C\}$). Il compte ceux qui n'ont pas deux lettres consécutives identiques.
2. Le premier choix de lettre est libre (3 choix) ; chacune des 4 lettres suivantes doit différer de la précédente (2 choix). Il y a $3 \times 2^4 = 48$ mots. Le script affiche 48.
3. Remplacer la condition `if ok` par `if ok and "A" in mot`. Le contraire de « contient A » est « ne contient pas A » : mots sur $\{B, C\}$ sans lettres consécutives identiques, soit $2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 2$ mots (BCBCB et CBCBC). Donc $48 - 2 = 46$; le script modifié affiche 46.
4. Même raisonnement : $3 \times 2^9 = 1\,536$ mots.

S7.

1. $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = 78 \iff n^2 - n - 156 = 0$. Le discriminant vaut $1 + 624 = 625 = 25^2$, les racines sont $\frac{1-25}{2} = -12$ et $\frac{1+25}{2} = 13$. Comme $n \in \mathbb{N}$, $n = 13$. Vérification : $\frac{13 \times 12}{2} = 78$.
2. $\frac{n!}{(n-3)!} = n(n-1)(n-2)$. L'application $n \mapsto n(n-1)(n-2)$ est strictement croissante pour $n \geq 3$ (produit de trois entiers positifs croissants) et $7 \times 6 \times 5 = 210$. Donc $n = 7$ est l'unique solution.
3. $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ et $2\binom{n}{2} = n(n-1)$. L'équation s'écrit $n(n-1)\left(\frac{n-2}{6} - 1\right) = 0$. Comme $n \geq 3$, $n(n-1) \neq 0$, donc $\frac{n-2}{6} = 1$ et $n = 8$. Vérification : $\binom{8}{3} = 56 = 2 \times 28$.
4. $\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n[(n-1) + (n+1)]}{2} = \frac{n \times 2n}{2} = n^2$.

Conclusion : $n = 13$, $n = 7$, $n = 8$ respectivement, et l'identité de la question 4 est démontrée.

S8.

1. Pour $n = 7$: $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56$ et $\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56$.
2. La relation de Pascal $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, appliquée avec $n = j$ et $k = 2$, donne $\binom{j}{2} + \binom{j}{3} = \binom{j+1}{3}$, d'où $\binom{j}{2} = \binom{j+1}{3} - \binom{j}{3}$.
3. Pour $n \geq 3$:

$$\sum_{j=2}^n \binom{j}{2} = \binom{2}{2} + \sum_{j=3}^n \left[\binom{j+1}{3} - \binom{j}{3} \right] = \binom{2}{2} + \binom{n+1}{3} - \binom{3}{3} = \binom{n+1}{3},$$

car la somme se simplifie de proche en proche (télescopage) et $\binom{2}{2} = \binom{3}{3} = 1$. Pour $n = 2$, la somme vaut $\binom{2}{2} = 1 = \binom{3}{3}$: l'égalité est vraie aussi.

4. La somme vaut $\sum_{j=2}^{20} \binom{j}{2} = \binom{21}{3} = \frac{21 \times 20 \times 19}{6} = 1\,330$.

Conclusion : l'égalité est démontrée pour tout $n \geq 2$ et $1 + 3 + 6 + \dots + 190 = 1\,330$.

S9.

1. Une grille est un 10-uplet d'éléments d'un ensemble à 4 réponses : $4^{10} = 1\,048\,576$ grilles.
2. On choisit les 3 questions réussies parmi 10 ($\binom{10}{3} = 120$), puis une mauvaise réponse parmi 3 pour chacune des 7 autres questions ($3^7 = 2\,187$) : $120 \times 2\,187 = 262\,440$ grilles. Les grilles étant équiprobables,

$$P = \frac{262\,440}{1\,048\,576} = \frac{32\,805}{131\,072} \approx 0,250.$$

3. Aucune bonne réponse : $3^{10} = 59\,049$ grilles, $P \approx \frac{59\,049}{1\,048\,576} \approx 0,056$. Le contraire de « aucune bonne réponse » est « au moins une » : $P \approx 1 - 0,056 = 0,944$.
4. Cas disjoints : 8 bonnes ($\binom{10}{8} \times 3^2 = 45 \times 9 = 405$), 9 bonnes ($\binom{10}{9} \times 3 = 30$), 10 bonnes (1).
Total : 436 grilles et $P = \frac{436}{1\,048\,576} = \frac{109}{262\,144} \approx 4,2 \times 10^{-4}$.

S10.

1. Ω est l'ensemble des triplets de boules deux à deux distinctes (tirages successifs sans remise, l'ordre compte). Les boules étant indiscernables au toucher, ces tirages sont équiprobables et $|\Omega| = 10 \times 9 \times 8 = 720$.

Trois rouges : $6 \times 5 \times 4 = 120$ triplets, donc $P = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}$.

Exactement deux rouges : on choisit la position de la boule noire (3 façons), puis la boule noire (4 façons) et les deux boules rouges dans l'ordre (6×5 façons) : $3 \times 4 \times 6 \times 5 = 360$ triplets, donc $P = \frac{360}{720} = \frac{1}{2}$.

2. Un tirage simultané de 3 boules est une partie à 3 éléments : $\binom{10}{3} = 120$ tirages équiprobables. Deux rouges : $\binom{6}{2} \binom{4}{1} = 15 \times 4 = 60$, donc $P = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$. Les deux résultats coïncident : l'événement considéré ne dépend pas de l'ordre, et chaque partie à 3 éléments correspond à exactement $3! = 6$ triplets ($360 = 6 \times 60$ et $720 = 6 \times 120$).

3. Le contraire de « au moins une rouge » est « aucune rouge » : $4 \times 3 \times 2 = 24$ triplets. $P = 1 - \frac{24}{720} = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$.

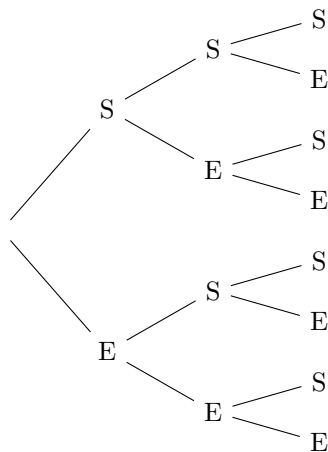
4. Avec remise, $|\Omega| = 10^3 = 1\,000$ triplets équiprobables. Exactement deux rouges : position de la noire (3 façons), puis 6^2 choix pour les rouges et 4 pour la noire : $3 \times 36 \times 4 = 432$. $P = \frac{432}{1\,000} = 0,432$.

5. La condition est `len(rouges) == 2`. Le script affiche 360, ce qui correspond à $P = \frac{360}{720} = \frac{1}{2}$.

Conclusion : $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$ (sans remise), $\frac{29}{30}$ pour au moins une rouge, 0,432 avec remise.

S11.

1. À chaque épreuve, l'arbre se divise en deux branches S et E.



L'arbre comporte $2 \times 2 \times 2 = 8$ chemins : SSS, SSE, SES, SEE, ESS, ESE, EES, EEE. Chaque chemin est un mot de $\{S; E\}^3$; en codant S par 1 et E par 0, on obtient une bijection avec les 8 triplets de $\{0; 1\}^3$.

2. Les chemins à 2 succès sont SSE, SES, ESS. Les parties des rangs des succès sont respectivement $\{1; 2\}$, $\{1; 3\}$, $\{2; 3\}$: ce sont les parties à 2 éléments de $\{1; 2; 3\}$. On retrouve $\binom{3}{2} = 3$.
3. Une issue à k succès est entièrement déterminée par la partie de $\{1; 2; 3; 4\}$ formée des rangs des succès, qui possède k éléments. Le nombre d'issues à k succès est donc $\binom{4}{k}$: 1, 4, 6, 4, 1 pour $k = 0, \dots, 4$. La somme vaut $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$, ce qui est cohérent avec le nombre total d'issues $\text{Card}(\{S; E\}^4) = 2^4$.
4. a) $\binom{6}{2} = 15$.

- b) Les deux succès sont aux rangs $(i; i + 1)$ avec $i \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$: 5 issues.
- c) $15 - 5 = 10$ issues (principe additif : les issues à deux succès sont soit consécutifs, soit non consécutifs).
- d) Aucun succès : 1 issue ; exactement un succès : $\binom{6}{1} = 6$ issues. Au total $1 + 6 = 7$ issues.

S12.

1. a) Pour $L = [1, 2, 3]$: $i = 0$ donne $[1, 2, 3]$ et $[1, 3, 2]$; $i = 1$ donne $[2, 1, 3]$ et $[2, 3, 1]$; $i = 2$ donne $[3, 1, 2]$ et $[3, 2, 1]$. La liste renvoyée est
- $[[1, 2, 3], [1, 3, 2], [2, 1, 3], [2, 3, 1], [3, 1, 2], [3, 2, 1]]$
- b) Notons p_n le nombre d'éléments renvoyés pour une liste à n éléments. Pour $n = 1$ (ou 0 élément), la liste renvoyée contient un seul élément : $p_1 = 1$. Pour $n \geq 2$, chacun des n choix de $L[i]$ donne autant de permutations que la liste **reste** de $n - 1$ éléments : $p_n = n p_{n-1}$. Donc $p_n = n \times (n - 1) \times \dots \times 1 = n!$. L'affichage est 24.
2. a) Pour $i = 2$ puis $i = 1$ (la boucle s'arrête avant $i = 0$) :

$(j_2; j_1)$	Après $i = 2$	Liste finale
(0; 0)	[c, b, a]	[b, c, a]
(0; 1)	[c, b, a]	[c, b, a]
(1; 0)	[a, c, b]	[c, a, b]
(1; 1)	[a, c, b]	[a, c, b]
(2; 0)	[a, b, c]	[b, a, c]
(2; 1)	[a, b, c]	[a, b, c]

Les 6 listes obtenues sont deux à deux distinctes : ce sont les 6 permutations de **a**, **b**, **c**.

- b) Le choix de j se fait parmi n valeurs pour $i = n - 1$, puis $n - 1$ valeurs pour $i = n - 2$, ..., puis 2 valeurs pour $i = 1$. Il y a $n \times (n - 1) \times \dots \times 2 = n!$ suites de choix (principe multiplicatif). Les choix sont indépendants et équiprobables : chaque suite a pour probabilité $\frac{1}{n} \times \frac{1}{n - 1} \times \dots \times \frac{1}{2} = \frac{1}{n!}$.
- c) L'application qui, à une suite de choix, associe la liste obtenue est injective (admis) entre deux ensembles de même cardinal $n!$: c'est une bijection. Chaque permutation est donc obtenue par une seule suite de choix, de probabilité $\frac{1}{n!}$.
- d) Il y a $4! = 24$ permutations de $\{2; 3; 4; 5\}$ pour les quatre dernières places, donc 24 permutations commençant par 1 sur les $5! = 120$ permutations équiprobables : la probabilité est $\frac{24}{120} = \frac{1}{5}$.