

Corrigé : Dénombrement**Fiche Défi****D1.**

1. Pour $0 \leq k \leq n-1$:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}.$$

On met sur le dénominateur commun $(k+1)!(n-k)!$, en utilisant $(k+1)! = (k+1)k!$ et $(n-k)! = (n-k)(n-k-1)!$:

$$= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

2. $\mathcal{P}_{k+1}$ est l'ensemble des parties de F à $k+1$ éléments ; son cardinal est $\binom{n+1}{k+1}$. On le partage en deux sous-ensembles disjoints.
Les parties contenant a : elles sont déterminées par le choix de leurs k autres éléments parmi les n éléments de $F \setminus \{a\}$: $\binom{n}{k}$ parties.

Les parties ne contenant pas a : ce sont des parties à $k+1$ éléments de $F \setminus \{a\}$: $\binom{n}{k+1}$ parties.

D'après le principe additif, $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

3. Notons $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des parties à k éléments et $c : A \mapsto \bar{A}$. Si $|A| = k$, alors $|\bar{A}| = n-k$, donc c envoie $\mathcal{P}_k(E)$ dans $\mathcal{P}_{n-k}(E)$. De même, c envoie $\mathcal{P}_{n-k}(E)$ dans $\mathcal{P}_k(E)$, et $\bar{\bar{A}} = A$: les deux applications sont réciproques l'une de l'autre, donc c est une bijection. Deux ensembles en bijection ont même cardinal : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
4. Le terme manquant est $L[j] + L[j+1]$: d'après la relation de Pascal, chaque terme intérieur de la nouvelle ligne est la somme de deux termes consécutifs de la ligne précédente, et les deux termes extrêmes valent 1. Pour $n=6$, le script affiche [1, 6, 15, 20, 15, 6, 1].

D2.

1. $u_0 = \binom{0}{0} = 1$. $u_1 = \binom{1}{0} + \binom{0}{1} = 1 + 0 = 1$. $u_2 = \binom{2}{0} + \binom{1}{1} + \binom{0}{2} = 1 + 1 + 0 = 2$.
 $u_3 = \binom{3}{0} + \binom{2}{1} + \binom{1}{2} + \binom{0}{3} = 1 + 2 + 0 + 0 = 3$. $u_4 = 1 + 3 + 1 + 0 + 0 = 5$. $u_5 = \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} + \binom{2}{3} + \dots = 1 + 4 + 3 = 8$. $u_6 = \binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 5 + 6 + 1 = 13$.
2. On a $u_{n+2} = \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2-k}{k} = \binom{n+2}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+2-k}{k} + \binom{0}{n+2}$. Le dernier terme est nul (car $n+2 > 0$) et le premier vaut 1. Pour $1 \leq k \leq n+1$, on pose $m = n+1-k \geq 0$ et la relation de Pascal donne

$$\binom{n+2-k}{k} = \binom{m+1}{k} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{n+1-k}{k} + \binom{n-(k-1)}{k-1}.$$

D'où

$$u_{n+2} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n-(k-1)}{k-1}.$$

La première somme, augmentée de 1 = $\binom{n+1}{0}$, est $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} = u_{n+1}$. Dans la seconde, le changement d'indice $j = k-1$ donne $\sum_{j=0}^n \binom{n-j}{j} = u_n$. Donc $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

- Initialisation : $u_0 = 1 = F_1$ et $u_1 = 1 = F_2$. Hérédité : soit $n \geq 0$ tel que $u_n = F_{n+1}$ et $u_{n+1} = F_{n+2}$. D'après la question 2, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n = F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}$. La propriété pour n et $n+1$ entraîne donc la propriété pour $n+2$ (récurrence à deux pas) : $u_n = F_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.
- Les k pas de deux marches font franchir $2k$ marches, les autres pas franchissent une marche chacun : il y a $n - 2k$ pas de une marche, donc $k + (n - 2k) = n - k$ pas au total. Une façon de monter est un mot de $n - k$ lettres (U pour une marche, D pour deux marches) comportant exactement k lettres D. Il est déterminé par la partie de $\{1; \dots; n - k\}$ formée des rangs des D : $\binom{n-k}{k}$ façons (ce nombre est nul si $k > n - k$, ce qui est cohérent car $2k > n$ est impossible). Les valeurs de k donnent des cas disjoints : le nombre total de façons est $\sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} = u_n$. Pour $n = 5$: $u_5 = 8$.
- Le premier affichage est $[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13]$ (question 1). Le second est $u_{20} = F_{21} = 10\,946$: 10946.

D3.

- L'application est injective : A est l'ensemble des x_i tels que $\varepsilon_i = 1$, donc le n -uplet détermine A . Elle est surjective : tout n -uplet de $\{0; 1\}^n$ est l'image de la partie $\{x_i; \varepsilon_i = 1\}$. C'est une bijection, donc le nombre de parties vaut $|\{0; 1\}^n| = 2^n$.
- Comptons de deux façons l'ensemble $\mathcal{U}$ des k -uplets d'éléments deux à deux distincts de E . Première façon : $|\mathcal{U}| = \frac{n!}{(n-k)!}$. Seconde façon : un k -uplet de $\mathcal{U}$ détermine la partie à k éléments formée de ses termes ; réciproquement, une partie à k éléments provient d'exactly $k!$ éléments de $\mathcal{U}$ (ses $k!$ ordres). Si c_k désigne le nombre de parties à k éléments, $|\mathcal{U}| = k! c_k$. Donc $c_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Une partie a un cardinal $k \in \{0, \dots, n\}$. En séparant les parties selon leur cardinal (cas disjoints), le nombre total de parties est $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$. D'après la question 1, il vaut 2^n .
- Si $a \in A$, alors $\varphi(A) = A \setminus \{a\}$ ne contient pas a , donc $\varphi(\varphi(A)) = (A \setminus \{a\}) \cup \{a\} = A$. Si $a \notin A$, $\varphi(A) = A \cup \{a\}$ contient a , donc $\varphi(\varphi(A)) = A$. Ainsi $\varphi \circ \varphi = \text{id}$ et φ est bijective. Dans les deux cas, le cardinal de $\varphi(A)$ est celui de A plus ou moins 1 : la parité change. Donc φ envoie les parties de cardinal pair dans celles de cardinal impair, et réciproquement. Comme φ est sa propre réciproque, ces deux restrictions sont des bijections : les deux familles ont le même cardinal. Leur somme valant 2^n , chacune compte 2^{n-1} parties.
- Le script parcourt les $2^5 = 32$ mots binaires de longueur 5, c'est-à-dire les parties de $\{0, \dots, 4\}$, et compte celles qui ont k éléments (nombre de 1). Il affiche $[1, 5, 10, 10, 5, 1]$, soit $\binom{5}{0}, \dots, \binom{5}{5}$: la ligne 5 du triangle de Pascal.

D4.

- Un groupe est une partie à n éléments d'un ensemble à $2n$ éléments : $\binom{2n}{n}$ groupes.
- Pour avoir exactement k filles, on choisit les k filles parmi n ($\binom{n}{k}$ façons) puis les $n - k$ garçons parmi n ($\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ façons, par symétrie). Principe multiplicatif : $\binom{n}{k}^2$ groupes.
- Les groupes se répartissent en cas disjoints selon le nombre k de filles, k allant de 0 à n . Donc $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. Pour $n = 5$: $1 + 25 + 100 + 100 + 25 + 1 = 252 = \binom{10}{5}$.
- Même raisonnement : si le groupe comporte k filles, il comporte $r - k$ garçons : $\binom{m}{k} \binom{p}{r-k}$ groupes (nul si $k > m$ ou $r - k > p$, d'où la convention). On somme sur k de 0 à r . Pour $m = 7$, $p = 5$,

$r = 4$:

$$\binom{7}{0}\binom{5}{4} + \binom{7}{1}\binom{5}{3} + \binom{7}{2}\binom{5}{2} + \binom{7}{3}\binom{5}{1} + \binom{7}{4}\binom{5}{0} = 5 + 70 + 210 + 175 + 35 = 495 = \binom{12}{4}.$$

5. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des couples (A, c) où A est une partie à k éléments de E et c un élément de A .
 Première façon : on choisit A ($\binom{n}{k}$ façons) puis c dans A (k façons) : $|\mathcal{C}| = k\binom{n}{k}$.
 Seconde façon : on choisit c (n façons) puis les $k-1$ autres éléments de A parmi les $n-1$ éléments restants ($\binom{n-1}{k-1}$ façons) : $|\mathcal{C}| = n\binom{n-1}{k-1}$. D'où $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. En sommant pour k de 1 à n (le terme $k=0$ est nul) :

$$\sum_{k=0}^n k\binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n 2^{n-1}.$$

Pour $n = 5$: $5 + 20 + 30 + 20 + 5 = 80 = 5 \times 2^4$.

D5.

- On a $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, réunion de deux ensembles disjoints, donc $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B \setminus A)$. De même $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$, réunion disjointe, donc $\text{Card}(B) = \text{Card}(B \setminus A) + \text{Card}(A \cap B)$, soit $\text{Card}(B \setminus A) = \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$. En remplaçant, on obtient la formule annoncée.
- Soit A l'ensemble des multiples de 2 et B celui des multiples de 3 dans $\{1, \dots, 100\}$. Alors $\text{Card}(A) = 50$, $\text{Card}(B) = 33$ et $A \cap B$ est l'ensemble des multiples de 6, de cardinal 16. Donc $\text{Card}(A \cup B) = 50 + 33 - 16 = 67$. Les entiers cherchés sont les $100 - 67 = 33$ restants.
- Parmi les multiples de 5 de $\{1, \dots, 100\}$ (au nombre de 20), ceux divisibles par 2 sont les multiples de 10 (au nombre de 10), ceux divisibles par 3 sont les multiples de 15 (au nombre de 6), et ceux divisibles par 2 et par 3 sont les multiples de 30 (au nombre de 3). D'après la question 1, $10 + 6 - 3 = 13$ multiples de 5 sont divisibles par 2 ou par 3. Donc $20 - 13 = 7$ multiples de 5 ne sont divisibles ni par 2 ni par 3 (ce sont 5, 25, 35, 55, 65, 85, 95). Parmi les 33 entiers de la question 2, 7 sont donc multiples de 5 et $33 - 7 = 26$ ne le sont pas.

Conclusion : 26 entiers de 1 à 100 ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5.

- a) Pour construire une application ayant les nombres $(n_a; n_b; n_c)$, on choisit les n_a éléments qui ont pour image a parmi 5 : $\binom{5}{n_a}$ possibilités, puis les n_b éléments d'image b parmi les $5 - n_a$ restants : $\binom{5-n_a}{n_b}$ possibilités. Les n_c éléments restants ont pour image c . Principe multiplicatif : $\binom{5}{n_a} \binom{5-n_a}{n_b}$ applications.
- b) Il faut $n_a + n_b + n_c = 5$ avec trois entiers supérieurs ou égaux à 1. Les triplets sont les permutations de $(3; 1; 1)$ et de $(2; 2; 1)$, soit $(3; 1; 1)$, $(1; 3; 1)$, $(1; 1; 3)$, $(2; 2; 1)$, $(2; 1; 2)$, $(1; 2; 2)$. Ces 6 cas sont deux à deux disjoints (principe additif).

- Pour $(3; 1; 1)$: $\binom{5}{3}\binom{2}{1} = 10 \times 2 = 20$. Pour $(1; 3; 1)$: $\binom{5}{1}\binom{4}{3} = 5 \times 4 = 20$. Pour $(1; 1; 3)$: $\binom{5}{1}\binom{4}{1} = 5 \times 4 = 20$. Au total 60.
- Pour $(2; 2; 1)$: $\binom{5}{2}\binom{3}{2} = 10 \times 3 = 30$. Pour $(2; 1; 2)$: $\binom{5}{2}\binom{3}{1} = 30$. Pour $(1; 2; 2)$: $\binom{5}{1}\binom{4}{2} = 5 \times 6 = 30$: au total 90.

Le nombre d'applications surjectives est $60 + 90 = 150$.

```
5. from itertools import product
print(sum(1 for f in product("abc", repeat=5))
```

```
if set(f) == {"a", "b", "c"})
```

Le script affiche 150.

D6.

1. Le mot `o|oooooo|ooo` correspond à $(1, 6, 3)$: il y a 1 jeton avant la première barre, 6 entre les deux barres, 3 après. Réciproquement, une répartition (x, y, z) avec $x + y + z = 10$ donne un unique mot : x o, une barre, y o, une barre, z o. Les deux constructions sont réciproques : c'est une bijection. Un mot est déterminé par les positions des 2 barres parmi les 12 symboles : il y a $\binom{12}{2} = 66$ mots, donc 66 répartitions.
2. Avec $x' = x - 1$, etc., on cherche les triplets d'entiers naturels tels que $x' + y' + z' = 7$. Par la même bijection avec 7 jetons et 2 barres : $\binom{9}{2} = 36$ répartitions.
3. Si A reçoit x jetons ($0 \leq x \leq 10$), il reste $10 - x$ jetons pour B et C : y prend les valeurs $0, \dots, 10 - x$ et $z = 10 - x - y$, soit $11 - x$ répartitions. Total (cas disjoints) : $\sum_{x=0}^{10} (11 - x) = 11 + 10 + \dots + 1 = 66$.
4. Une répartition correspond à un mot de 10 o et 2 barres. En interprétant o comme un pas vers la droite et la barre comme un pas vers le haut, c'est un chemin de $(0; 0)$ à $(10; 2)$: il y en a $\binom{12}{2} = 66$.
5. La condition est `x + y + z == 10`. Le script affiche 66.

D7. Partie A.

1. Un tirage est une partie à 5 éléments de l'ensemble des 30 entiers : $\binom{30}{5} = 142\,506$ tirages.
2. Pour avoir exactement k numéros communs, on choisit ces k numéros parmi les 5 de la grille ($\binom{5}{k}$ façons), puis les $5 - k$ autres numéros du tirage parmi les 25 numéros non cochés ($\binom{25}{5-k}$ façons). Principe multiplicatif, puis équiprobabilité :

k	0	1	2	3	4	5
Nombre de tirages	53 130	63 250	23 000	3 000	125	1
$P(X = k)$	$\frac{53\,130}{142\,506}$	$\frac{63\,250}{142\,506}$	$\frac{23\,000}{142\,506}$	$\frac{3\,000}{142\,506}$	$\frac{125}{142\,506}$	$\frac{1}{142\,506}$
Valeur approchée	0,3728	0,4438	0,1614	0,0211	0,0009	7×10^{-6}

3. $53\,130 + 63\,250 + 23\,000 + 3\,000 + 125 + 1 = 142\,506$, donc la somme des probabilités vaut 1. Cela traduit l'égalité $\sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} \binom{25}{5-k} = \binom{30}{5}$ (cas $m = 5$, $p = 25$, $r = 5$ de l'identité de l'exercice D4).

Partie B.

4. La somme reçue est non nulle si et seulement si $X \geq 2$: $P = \frac{23\,000 + 3\,000 + 125 + 1}{142\,506} = \frac{26\,126}{142\,506} = \frac{13\,063}{71\,253} \approx 0,183$.
5. G prend les valeurs 0, 2, 20, 500, 10 000.

$$E(G) = \frac{2 \times 23\,000 + 20 \times 3\,000 + 500 \times 125 + 10\,000 \times 1}{142\,506} = \frac{178\,500}{142\,506} = \frac{4\,250}{3\,393} \approx 1,25.$$

Le gain net $G - 2$ a pour espérance $E(G) - 2 = -\frac{2\,536}{3\,393} \approx -0,75$. En moyenne, le joueur perd environ 0,75 euro par partie : le jeu lui est défavorable.

6. Pour une mise m , l'espérance du gain net est $E(G) - m$. Le jeu est équitable pour $m = E(G) \approx 1,25$ euro.

Partie C.

7. Le script calcule $E(G)$: il affiche une valeur proche de 1.2525788... Pour obtenir l'espérance du gain net, on remplace la dernière ligne par `print(E - 2)` ; on obtient environ -0.7474.

D8.

1. Le joueur J_1 a 7 adversaires possibles. Parmi les 6 joueurs restants, celui de plus petit indice a 5 adversaires possibles ; parmi les 4 restants, celui de plus petit indice en a 3 ; les deux derniers s'affrontent (1 possibilité). Un appariement est entièrement déterminé par cette suite de choix (et chaque suite de choix donne un appariement différent). D'après le principe multiplicatif : $7 \times 5 \times 3 \times 1 = 105$.
2. Il y a $8! = 40\,320$ files. Un même appariement est obtenu en ordonnant les 4 matchs ($4! = 24$ façons) puis en ordonnant les deux joueurs de chaque match ($2^4 = 16$ façons) : $24 \times 16 = 384$ files. Le nombre d'appariements est $\frac{40\,320}{384} = 105$.
3. Si J_1 joue contre J_2 , il reste à apparier les 6 autres joueurs : $5 \times 3 \times 1 = 15$ appariements. La probabilité vaut $\frac{15}{105} = \frac{1}{7}$ (ce que l'on retrouve car J_1 a 7 adversaires équiprobables).
4. Aucun match entre joueurs du même club signifie que chaque joueur de X affronte un joueur de Y , avec des joueurs de Y deux à deux distincts : on associe à $J_1, \dots, J_4$ des adversaires distincts dans Y , soit $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ appariements. Probabilité : $\frac{24}{105} = \frac{8}{35} \approx 0,229$.
5. Le script fixe le premier joueur, lui associe chacun des autres (boucle sur `i`) puis apparie récursivement les joueurs restants : c'est le raisonnement de la question 1. Il affiche 105. Pour 10 joueurs : $9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1 = 945$ appariements.