

Dénombrement**Fiche Bases**

Nom : _____

Date : _____

Exercice B1 : Factorielles

1. Calculer $5!$, $\frac{8!}{6!}$ et $\frac{10!}{7! \times 3!}$.
2. Pour $n \geq 2$, simplifier $\frac{n!}{(n-2)!}$ et $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$.
3. Écrire le produit $6 \times 5 \times 4$ à l'aide de factorielles.

Exercice B2 : Principes additif et multiplicatif

Un restaurant propose 4 entrées, 5 plats et 3 desserts.

1. Un menu complet comprend une entrée, un plat et un dessert. Combien de menus complets peut-on composer ?
2. Une formule comprend soit une entrée et un plat, soit un plat et un dessert. Combien de formules différentes existe-t-il ?
3. Un client est allergique à 1 des plats et à 1 des desserts. Combien de menus complets lui sont accessibles ?
4. Pour un restaurant simplifié à 2 entrées et 3 plats, dessiner l'arbre des choix et retrouver le nombre de menus « entrée + plat ».

Exercice B3 : Réunion, intersection, complémentaire

Dans une classe de 32 élèves, 19 pratiquent un sport collectif, 14 font partie de la chorale et 7 font les deux.

1. Compléter le tableau à double entrée ci-dessous.

	Chorale	Pas de chorale	Total
Sport collectif			
Pas de sport collectif			
Total			32

2. Combien d'élèves pratiquent au moins une des deux activités ? Aucune des deux ?
3. Combien d'élèves pratiquent exactement une des deux activités ?

Exercice B4 : k -uplets

1. Un mot de passe est formé de 3 lettres majuscules (alphabet de 26 lettres) suivies de 2 chiffres. Les répétitions sont autorisées. Combien de mots de passe existe-t-il ?
2. On lance une pièce 6 fois de suite et on note la suite des résultats (pile ou face). Combien de suites sont possibles ?
3. Une séquence d'ADN est une suite de bases choisies parmi A, C, G, T. Combien de séquences de longueur 6 existe-t-il ?
4. Combien y a-t-il d'applications de $E = \{1; 2; 3\}$ dans $F = \{a; b; c; d; e\}$? Et de F dans E ?

Exercice B5 : Arrangements et permutations

1. Neuf coureurs participent à une course. Combien de podiums (premier, deuxième, troisième) sont possibles, sans ex æquo ?
2. De combien de façons 6 élèves peuvent-ils se ranger dans une file ?
3. Combien de codes de 4 chiffres, tous distincts, peut-on former avec les chiffres de 0 à 9 ?
4. Un club de 12 membres élit un bureau : un président, un secrétaire et un trésorier, tous différents. Combien de bureaux possibles ?

Exercice B6 : Coefficients binomiaux et triangle de Pascal

1. Calculer sans calculatrice $\binom{7}{2}$, $\binom{9}{3}$, $\binom{100}{98}$ et $\binom{12}{0} + \binom{12}{12}$.
2. La ligne 5 du triangle de Pascal est 1 5 10 10 5 1. Écrire les lignes 6 et 7.
3. Calculer $\binom{6}{2} + \binom{6}{3}$ de deux façons : avec les valeurs de la ligne 6, puis avec la relation de Pascal.
4. Calculer $\binom{8}{3}$ avec la formule $\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$, puis avec la formule $\frac{n!}{(n-k)!k!}$.
5. Pour $n \geq 2$, expliciter $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$ et $\binom{n}{2}$ à l'aide de la formule avec factorielles. Interpréter chaque résultat en termes de parties d'un ensemble à n éléments.

Exercice B7 : Tirage simultané

Un sac contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. On tire simultanément 3 jetons.

1. Combien de tirages sont possibles ?
2. Combien de tirages ne comportent aucun jeton pair ? En déduire le nombre de tirages comportant au moins un jeton pair.
3. Combien de tirages comportent le jeton n°1 ?
4. Combien de tirages comportent exactement un jeton pair ?

Exercice B8 : Vrai ou faux ? (justifier)

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant.

- a) Un ensemble de 8 éléments possède 256 parties.
- b) Le nombre de façons d'élire un président et un vice-président parmi 8 candidats est $\binom{8}{2}$.
- c) $\binom{15}{4} = \binom{15}{11}$.
- d) $\binom{9}{3} + \binom{9}{4} = \binom{10}{4}$.
- e) Pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{n!}{(n-1)!} = n$.
- f) Pour tous réels a et b , $(a+b)^3 = a^3 + b^3$.

Exercice B9 : Vocabulaire ensembliste

Soit $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $A = \{1; 2; 3\}$ et $C = \{2; 4; 6\}$.

1. Déterminer $A \cap C$, $A \cup C$ et le complémentaire $\bar{A} = E \setminus A$, ainsi que leurs cardinaux $\text{Card}(\cdot)$. Vérifier que $\text{Card}(A \cup C) = \text{Card}(A) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap C)$.
2. Soit $B = \{a; b\}$. Écrire en extension le produit cartésien $A \times B$ et donner son cardinal. Le couple $(a; 1)$ appartient-il à $A \times B$? À $B \times A$?
3. On note B^3 l'ensemble des triplets d'éléments de B . Donner $\text{Card}(B^3)$ et écrire trois éléments de B^3 . Combien de triplets de B^3 contiennent au moins une fois la lettre a ?
4. Combien de couples $(x; y)$ l'ensemble E^2 contient-il ? Parmi eux, combien vérifient $x < y$? Comparer avec le nombre de parties à 2 éléments de E .

Exercice B10 : Lire et écrire du Python

On considère les deux scripts suivants.

```
from math import comb, perm, factorial
print(factorial(5))
print(perm(10, 3))
print(comb(10, 3))
```

```
print(comb(8, 3) + comb(8, 4) == comb(9, 4))
```

```
from itertools import product
n = 0
for (a, b) in product(range(1, 7), repeat=2):
    if a + b == 7:
        n = n + 1
print(n)
```

1. Donner les quatre affichages du premier script. Que représente le nombre affiché par `perm(10, 3)` ?
2. Que compte le second script ? Donner son affichage et le vérifier en listant les couples concernés.
3. Écrire une instruction Python qui donne le nombre de mains de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

Exercice B11 : Python : listes et parties à 2 ou 3 éléments

On considère le script suivant.

```
parties2 = []
for i in range(5):
    for j in range(i + 1, 5):
        parties2.append([i, j])
print(len(parties2))
print(parties2[:4])
parties3 = [[i, j, k] for i in range(5)
            for j in range(i + 1, 5)
            for k in range(j + 1, 5)]
print(len(parties3))
```

1. Donner les deux premiers affichages. Pourquoi la condition $j > i$ garantit-elle que chaque partie à 2 éléments de $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ apparaît une seule fois ?
2. Donner le dernier affichage et les premier et dernier éléments de `parties3`. Quel coefficient binomial retrouve-t-on ?
3. Écrire, en compréhension, la liste des parties à 2 éléments de $\{0; \dots; 7\}$ dont la somme des éléments est paire. Prévoir par le calcul la longueur de cette liste.