

Corrigé : Dénombrement**Fiche Bases****B1.**

1. $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. Ensuite $\frac{8!}{6!} = 8 \times 7 = 56$ et $\frac{10!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = \frac{720}{6} = 120$.
2. $\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$ et $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1) \times n \times (n-1)!}{(n-1)!} = (n+1)n$.
3. $6 \times 5 \times 4 = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = \frac{6!}{3!} = 120$.

B2.

1. On choisit successivement l'entrée (4 possibilités), le plat (5) puis le dessert (3). D'après le principe multiplicatif, il y a $4 \times 5 \times 3 = 60$ menus complets.

Conclusion : 60 menus complets.

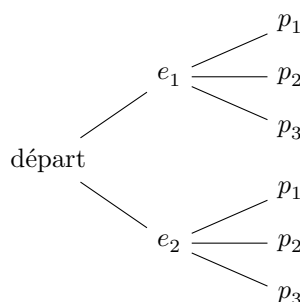
2. On sépare deux cas disjoints : une formule « entrée + plat » ($4 \times 5 = 20$ possibilités) ou une formule « plat + dessert » ($5 \times 3 = 15$ possibilités). Aucune formule n'appartient aux deux cas (elle contient une entrée ou un dessert, jamais les deux). D'après le principe additif, il y a $20 + 15 = 35$ formules.

Conclusion : 35 formules.

3. Il reste 4 entrées possibles, 4 plats et 2 desserts : $4 \times 4 \times 2 = 32$ menus.

Conclusion : 32 menus complets accessibles.

4. Chaque chemin de l'arbre est un menu.



L'arbre compte $2 \times 3 = 6$ chemins, donc 6 menus « entrée + plat ».

B3.

1. Les deux activités : 7. Sport seul : $19 - 7 = 12$. Chorale seule : $14 - 7 = 7$. Total des deux colonnes « chorale » : 14, donc « pas de chorale » : $32 - 14 = 18$.

	Chorale	Pas de chorale	Total
Sport collectif	7	12	19
Pas de sport collectif	7	6	13
Total	14	18	32

2. Soit S l'ensemble des élèves pratiquant un sport collectif et C celui des choristes. Alors $|S \cup C| = |S| + |C| - |S \cap C| = 19 + 14 - 7 = 26$.

Aucune des deux activités : $32 - 26 = 6$ élèves (cardinal du complémentaire).

3. Exactement une activité : $12 + 7 = 19$ élèves (cas disjoints : sport seul, chorale seule). On retrouve aussi $26 - 7 = 19$.

Conclusion : 26 élèves pratiquent au moins une activité, 6 aucune, 19 exactement une.

B4.

1. Un mot de passe est un 5-uplet : 3 lettres (26 choix chacune) puis 2 chiffres (10 choix chacun), avec répétitions. Il y en a $26^3 \times 10^2 = 17\,576 \times 100 = 1\,757\,600$.
2. Une suite de résultats est un 6-uplet d'éléments de $\{\text{pile}; \text{face}\}$: $2^6 = 64$ suites.

3. Une séquence est un 6-uplet d'éléments d'un ensemble à 4 éléments : $4^6 = 4096$ séquences.
4. Une application de E dans F associe à chacun des 3 éléments de E une image parmi 5 : $5^3 = 125$ applications. De F dans E : chacun des 5 éléments de F a 3 images possibles, soit $3^5 = 243$ applications.

B5.

1. Un podium est un triplet de coureurs distincts : $9 \times 8 \times 7 = 504$ podiums.
2. Une file est un ordre sur 6 élèves : $6! = 720$ files.
3. Un code est un 4-uplet de chiffres distincts : $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ codes.
4. Un bureau est un triplet de membres distincts (l'ordre compte car les rôles diffèrent) : $12 \times 11 \times 10 = 1320$ bureaux.

B6.

1. $\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$. $\binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$. Par symétrie, $\binom{100}{98} = \binom{100}{2} = \frac{100 \times 99}{2} = 4950$.
Enfin $\binom{12}{0} + \binom{12}{12} = 1 + 1 = 2$.
2. Chaque terme est la somme des deux termes situés au-dessus.
Ligne 6 : 1 6 15 20 15 6 1.
Ligne 7 : 1 7 21 35 35 21 7 1.
3. Avec la ligne 6 : $\binom{6}{2} + \binom{6}{3} = 15 + 20 = 35$. Avec Pascal : $\binom{6}{2} + \binom{6}{3} = \binom{7}{3} = 35$, valeur lue sur la ligne 7.
4. Avec $n = 8$ et $k = 3$: $\frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = \frac{336}{6} = 56$. Avec les factorielles : $\frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56$. Les deux formules donnent $\binom{8}{3} = 56$.
5. $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$ (une seule partie sans élément : la partie vide). $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$ (n parties à un élément : les singletons). $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$ (nombre de paires $\{x; y\}$: on choisit un couple d'éléments distincts, soit $n(n-1)$ possibilités, et chaque paire est obtenue deux fois).

B7.

1. Un tirage simultané est sans ordre et sans répétition : c'est une partie à 3 éléments d'un ensemble à 10 éléments. Il y a $\binom{10}{3} = 120$ tirages.
2. Aucun jeton pair : 3 jetons parmi les 5 impairs, soit $\binom{5}{3} = 10$ tirages. Le contraire de « aucun pair » est « au moins un pair » : $120 - 10 = 110$ tirages.
3. Le jeton n°1 est imposé ; on choisit les 2 autres parmi les 9 restants : $\binom{9}{2} = 36$ tirages.
4. On choisit le jeton pair (5 façons) puis 2 jetons impairs ($\binom{5}{2} = 10$ façons) : $5 \times 10 = 50$ tirages.

B8.

- a) **Vrai.** Un ensemble à n éléments a 2^n parties (pour chaque élément : dedans ou dehors) et $2^8 = 256$.
- b) **Faux.** L'ordre compte (président et vice-président jouent des rôles différents) : il y a $8 \times 7 = 56$ possibilités, alors que $\binom{8}{2} = 28$.
- c) **Vrai.** Symétrie : $\binom{15}{11} = \binom{15}{15-11} = \binom{15}{4}$.
- d) **Vrai.** C'est la relation de Pascal $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ avec $n = 9$ et $k = 3$. Numériquement :

$$84 + 126 = 210 = \binom{10}{4}.$$

e) **Vrai.** $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n.$

f) **Faux.** Contre-exemple : $a = b = 1$ donne $(1+1)^3 = 8$ et $1^3 + 1^3 = 2$. En fait $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

B9.

1. $A \cap C = \{2\}$, $A \cup C = \{1; 2; 3; 4; 6\}$ et $\bar{A} = \{4; 5; 6\}$. Leurs cardinaux sont 1, 5 et 3. Comme $\text{Card}(A) = \text{Card}(C) = 3$, on a bien $3 + 3 - 1 = 5 = \text{Card}(A \cup C)$.
2. $A \times B = \{(1; a), (1; b), (2; a), (2; b), (3; a), (3; b)\}$, de cardinal $3 \times 2 = 6$. Le couple $(a; 1)$ n'appartient pas à $A \times B$ (sa première composante a n'est pas dans A), mais il appartient à $B \times A$.
3. $\text{Card}(B^3) = 2^3 = 8$. Exemples : $(a; a; b)$, $(b; b; b)$, $(a; b; a)$. Le seul triplet sans la lettre a est $(b; b; b)$, donc $8 - 1 = 7$ triplets contiennent au moins une fois a .
4. $\text{Card}(E^2) = 6^2 = 36$. Les couples vérifient soit $x < y$, soit $x = y$, soit $x > y$: 6 couples vérifient $x = y$ et, par symétrie, autant vérifient $x < y$ que $x > y$, donc $\frac{36-6}{2} = 15$ couples vérifient $x < y$. C'est le nombre $\binom{6}{2} = 15$ de parties à 2 éléments : à une partie $\{x; y\}$ on associe le seul couple la décrivant dans l'ordre croissant.

B10.

1. Affichages : 120, 720, 120, True. Le nombre $\text{perm}(10, 3) = 10 \times 9 \times 8 = 720$ est le nombre de 3-uplets d'éléments deux à deux distincts d'un ensemble à 10 éléments (arrangements). La dernière ligne illustre la relation de Pascal.
2. Le script compte les couples (a, b) de $\{1, \dots, 6\}^2$ de somme 7, c'est-à-dire les résultats de deux dés dont la somme vaut 7. Couples : $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$. Affichage : 6.
3. `comb(32, 5)` (après `from math import comb`); il affiche 201 376.

B11.

1. Le premier affichage est 10, le deuxième est `[[0, 1], [0, 2], [0, 3], [0, 4]]`. Une partie $\{x; y\}$ avec $x < y$ est produite uniquement pour $i = x$ et $j = y$: l'ordre $(y; x)$ est exclu par la condition $j > i$. Il y a $\binom{5}{2} = 10$ parties, contre $5 \times 4 = 20$ couples d'éléments distincts.
2. Le dernier affichage est 10. Le premier élément de `parties3` est `[0, 1, 2]` et le dernier est `[2, 3, 4]`. On retrouve $\binom{5}{3} = 10$.
3. Par exemple :

```
L = [[i, j] for i in range(8) for j in range(i + 1, 8)
      if (i + j) % 2 == 0]
```

La somme $i + j$ est paire si et seulement si i et j ont la même parité. Il faut choisir deux nombres pairs parmi $\{0; 2; 4; 6\}$ ou deux nombres impairs parmi $\{1; 3; 5; 7\}$: $\binom{4}{2} + \binom{4}{2} = 6 + 6 = 12$. La liste contient 12 éléments.