

Fiche 4 : dénombrement et probabilités, problèmes classiques

Huit exercices de synthèse :

- probabilités en situation d'équiprobabilité avec des cartes ;
- le loto ;
- le paradoxe des anniversaires avec Python ;
- des mots de passe ;
- une urne avec plusieurs couleurs ;
- des chemins avec un point interdit ;
- des poignées de main et un championnat ;
- une vérification par énumération avec Python.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- l'espace des issues Ω est décrit ;
- l'équiprobabilité est justifiée ;
- cas favorables et cas possibles sont dénombrés avec le même modèle ;
- la probabilité est écrite sous forme de fraction irréductible, puis en valeur approchée.

Le modèle de rédaction d'une probabilité par dénombrement

« On tire simultanément 5 cartes parmi 32, au hasard.

L'ensemble Ω des issues est l'ensemble des parties à 5 éléments d'un ensemble à 32 éléments. $|\Omega| = \binom{32}{5} = 201\,376$.

Tous les tirages sont équiprobables.

Soit A l'événement « exactement 2 cœurs ». $|A| = \binom{8}{2} \times \binom{24}{3} = 56\,672$.

Donc $P(A) = \frac{56\,672}{201\,376} = \frac{253}{899} \approx 0,281$. »

- Décris Ω et justifie l'équiprobabilité (« au hasard », « tous les tirages ont la même chance »).
- Dénombre Ω et A avec le même modèle.
- Écris $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, simplifie, donne une valeur approchée.

Les pièges classiques

- Dénombrer Ω avec ordre (k -uplets) et A sans ordre (combinaisons), ou l'inverse.
- Oublier de justifier l'équiprobabilité.
- Ne pas simplifier la fraction ou ne pas donner de valeur approchée.
- Confondre « exactement k » et « au moins k ».

Au loto, la probabilité de gagner est si faible que la meilleure stratégie reste de ne pas y compter pour payer ses études.

Exercice 1 (★★) : une main de cartes

On tire simultanément 5 cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes. Ce jeu contient 8 cœurs. Calculer la probabilité d'obtenir exactement 2 cœurs.

Correction de l'exercice 1**L'univers**

Ω est l'ensemble des parties à 5 éléments d'un ensemble de 32 cartes. $|\Omega| = \binom{32}{5} = 201\,376$.

Le tirage est fait au hasard : toutes les mains sont équiprobables.

L'événement A : « exactement 2 cœurs »

On choisit 2 cœurs parmi 8 : $\binom{8}{2} = 28$. Puis 3 cartes parmi les 24 cartes qui ne sont pas des cœurs : $\binom{24}{3} = 2\,024$. $|A| = 28 \times 2\,024 = 56\,672$.

La probabilité

$$P(A) = \frac{56\,672}{201\,376} = \frac{253}{899} \approx 0,281$$

Exercice 2 (★★) : le loto

Au loto, un joueur choisit 5 numéros parmi 49 et un numéro chance parmi 10. Le tirage donne 5 numéros parmi 49 et un numéro chance parmi 10, au hasard.

Calculer :

1. la probabilité de remporter le jackpot (5 bons numéros et le bon numéro chance) ;
2. la probabilité d'avoir exactement 3 bons numéros parmi les 5 (sans tenir compte du numéro chance).

Correction de l'exercice 2

Question 1

Le nombre de tirages possibles est $\binom{49}{5} \times 10 = 1\,906\,884 \times 10 = 19\,068\,840$. Ils sont tous équiprobables. Un seul tirage donne le jackpot.

$$P = \frac{1}{19\,068\,840} \approx 5,2 \times 10^{-8}$$

Question 2

Ici, seuls les 5 numéros comptent. Ω est l'ensemble des parties à 5 éléments de $\{1, \dots, 49\}$.

$|\Omega| = \binom{49}{5} = 1\,906\,884$. Pour avoir exactement 3 bons numéros :

- 3 numéros parmi les 5 gagnants : $\binom{5}{3} = 10$;
- 2 numéros parmi les 44 non gagnants : $\binom{44}{2} = 946$.

Tirages favorables : $10 \times 946 = 9\,460$.

$$P = \frac{9\,460}{1\,906\,884} = \frac{2\,365}{476\,721} \approx 0,005$$

Exercice 3 (★★★) : le paradoxe des anniversaires

Dans un groupe de n personnes ($n \leq 365$), on suppose que :

- les 365 dates d'anniversaire sont équiprobables ;
- les dates des personnes sont indépendantes.

1. Exprimer la probabilité p_n que deux personnes au moins aient la même date d'anniversaire.
2. Écrire un script Python qui renvoie le plus petit n tel que $p_n \geq 0,5$. Donner sa valeur.

Correction de l'exercice 3

Question 1

Une répartition des anniversaires est un n -uplet de dates. $|\Omega| = 365^n$, tous équiprobables.

On passe à l'événement contraire : « toutes les dates sont distinctes ».

Il y a $365 \times 364 \times \dots \times (365 - n + 1)$ n -uplets de dates distinctes.

$$p_n = 1 - \frac{365 \times 364 \times \dots \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

Question 2

```
def seuil():
    n = 0
    q = 1
    while 1 - q < 0.5:
        q = q * (365 - n)/365
        n = n + 1
    return n
```

La variable q vaut la probabilité que les n premières personnes aient des dates toutes distinctes. À chaque tour, on ajoute une personne (facteur $\frac{365 - n}{365}$).

Le script renvoie 23.

Dès 23 personnes, la probabilité d'avoir au moins deux anniversaires identiques dépasse $\frac{1}{2}$: $p_{23} \approx 0,507$.

Pour 50 personnes : $p_{50} \approx 0,970$.

C'est un résultat contre-intuitif, d'où le nom de « paradoxe ».

Exercice 4 (★★) : les mots de passe

Un mot de passe comporte 6 caractères.

1. Il est formé de 4 lettres majuscules suivies de 2 chiffres. Combien de mots de passe ?
2. Il est formé de 6 caractères alphanumériques (26 lettres et 10 chiffres).

Il commence par une lettre et finit par un chiffre.

Combien de mots de passe ?

3. Dans le cas 1, quelle est la probabilité qu'un mot de passe tiré au hasard ait ses 4 lettres distinctes ?

Correction de l'exercice 4

Question 1

On choisit successivement 4 lettres (26 choix chacune) puis 2 chiffres (10 choix chacun), avec répétitions possibles. $26^4 \times 10^2 = 456\,976 \times 100$.

Il y a 45 697 600 mots de passe.

Question 2

Premier caractère : une lettre (26 choix). Dernier caractère : un chiffre (10 choix). Les 4 caractères intermédiaires sont quelconques parmi 36 : $36^4 = 1\,679\,616$. $26 \times 36^4 \times 10$.

Il y a 436 700 160 mots de passe.

Question 3

Ω : les 45 697 600 mots de passe, équiprobables. Mots de passe à 4 lettres distinctes : $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 10^2 = 358\,800 \times 100 = 35\,880\,000$.

$$P = \frac{35\,880\,000}{45\,697\,600} = \frac{358\,800}{456\,976} \approx 0,785$$

Exercice 5 (★★) : une urne à trois couleurs

Une urne contient :

- 5 boules rouges ;
- 4 boules vertes ;
- 3 boules bleues.

Elles sont indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules.

Calculer le nombre de tirages, puis la probabilité :

1. de tirer 3 boules de la même couleur ;
2. de tirer 3 boules de couleurs différentes ;
3. de tirer exactement 2 rouges ;
4. de tirer au moins une verte.

Correction de l'exercice 5

L'univers

Ω est l'ensemble des parties à 3 éléments de 12 boules. $|\Omega| = \binom{12}{3} = 220$. Les boules sont indiscernables au toucher : les tirages sont équiprobables.

Question 1

Même couleur (cas disjoints) : $\binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 10 + 4 + 1 = 15$.

$$P = \frac{15}{220} = \frac{3}{44} \approx 0,068$$

Question 2

Une boule de chaque couleur : $5 \times 4 \times 3 = 60$.

$$P = \frac{60}{220} = \frac{3}{11} \approx 0,273$$

Question 3

Exactement 2 rouges : $\binom{5}{2} \times \binom{7}{1} = 10 \times 7 = 70$ (une boule parmi les 7 non rouges).

$$P = \frac{70}{220} = \frac{7}{22} \approx 0,318$$

Question 4

Par complémentaire. Aucun vert signifie 3 boules parmi les 8 non vertes : $\binom{8}{3} = 56$. Les tirages avec au moins une verte sont au nombre de $220 - 56 = 164$.

$$P = \frac{164}{220} = \frac{41}{55} \approx 0,745$$

Exercice 6 (★★) : un chemin qui évite un point

On se déplace de $(0,0)$ à $(4,3)$. Les pas vont vers la droite ou vers le haut. Combien de chemins évitent le point $(2,1)$?

Correction de l'exercice 6

Tous les chemins

Un chemin comporte 7 pas dont 3 vers le haut. $\binom{7}{3} = 35$ chemins.

Les chemins qui passent par $(2,1)$

De $(0,0)$ à $(2,1)$: $\binom{3}{1} = 3$ chemins. De $(2,1)$ à $(4,3)$: 4 pas dont 2 vers le haut, $\binom{4}{2} = 6$ chemins. $3 \times 6 = 18$ chemins passent par $(2,1)$.

Par complémentaire

$$35 - 18$$

17 chemins évitent $(2,1)$.

Exercice 7 (★★) : poignées de main et championnat

1. Dans un groupe de 10 personnes, chacune serre la main de toutes les autres. Combien de poignées de main ?

2. Dans un championnat de 20 équipes, chaque équipe rencontre chaque autre deux fois (match aller et match retour).

Combien de matchs au total ?

Combien par équipe ?

Correction de l'exercice 7**Question 1**

Une poignée de main correspond à une paire de personnes. C'est une partie à 2 éléments parmi 10, sans ordre. $\binom{10}{2}$.

Il y a 45 poignées de main.

Question 2

Un match est déterminé par un couple ordonné (équipe à domicile, équipe à l'extérieur) d'équipes distinctes. 20×19 .

Il y a 380 matchs.

Autre écriture : $2 \times \binom{20}{2} = 2 \times 190 = 380$. Chaque équipe joue 19 matchs à domicile et 19 à l'extérieur.

38 matchs par équipe.

Exercice 8 (★★★) : vérifier par énumération avec Python

On numérote les 32 cartes de 0 à 31.

Les cœurs sont les cartes dont le numéro est multiple de 4 (il y en a 8).

Écrire un script qui énumère toutes les mains de 5 cartes et compte celles qui ont exactement 3 cœurs.

Comparer avec la formule de la fiche 2.

Correction de l'exercice 8**Le script**

```

from itertools import combinations

compteur = 0
for main in combinations(range(32), 5):
    coeurs = 0
    for carte in main:
        if carte % 4 == 0:
            coeurs = coeurs + 1
    if coeurs == 3:
        compteur = compteur + 1
print(compteur)

```

Le résultat

La fonction `combinations` génère chacune des $\binom{32}{5} = 201\,376$ mains une seule fois.

Le script affiche 15 456.

Cela coïncide avec la formule : $\binom{8}{3} \times \binom{24}{2} = 56 \times 276 = 15\,456$.

Une limite

L'énumération confirme la formule.

Mais elle devient impraticable pour de grandes valeurs.

Pour un jeu de 52 cartes et une main de 13 cartes, il y a plus de 600 milliards de mains.

Le dénombrement par formule est indispensable.

Ce qui peut tomber au bac

- Une **probabilité par dénombrement** avec une main, une urne ou un jeu de loto (exercices 1, 2, 5).
- Un **événement contraire** pour « au moins un » (exercices 3 et 5).
- Un **algorithme** de seuil ou d'énumération (exercices 3 et 8).
- Des **chemins** avec contrainte (exercice 6).
- Un **dénombrement de paires ou de couples** (exercice 7).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. On tire simultanément 2 boules dans une urne de 4 rouges et 6 vertes. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 rouges ?

A. $\frac{4}{25}$

- B. $\frac{1}{5}$
 C. $\frac{2}{15}$ (bonne réponse)
 D. $\frac{2}{5}$

Justification : $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$.

2. On lance 3 dés équilibrés. Quelle est la probabilité d'obtenir trois 6 ?

- A. $\frac{1}{216}$ (bonne réponse)
 B. $\frac{1}{18}$
 C. $\frac{1}{6}$
 D. $\frac{1}{36}$

Justification : Les lancers sont indépendants : $\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$.

3. Combien y a-t-il de mains de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes ?

- A. 5^{32}
 B. $\binom{32}{5} = 201\,376$ (bonne réponse)
 C. $32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28$
 D. 32^5

Justification : L'ordre des cartes dans la main ne compte pas : combinaisons.

4. On lance 3 dés. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?

- A. $\frac{91}{216}$ (bonne réponse)
 B. $\frac{1}{2}$
 C. $\frac{3}{6}$
 D. $\frac{1}{216}$

Justification : Événement contraire : aucun 6, de probabilité $\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$.

5. Dans une urne de 4 rouges et 6 vertes, on tire 2 boules **avec remise**. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 rouges ?

- A. $\frac{4}{25}$ (bonne réponse)
 B. $\frac{2}{15}$
 C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{1}{25}$

Justification : Les tirages sont indépendants : $\frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$.

6. Dans l'exercice 3 (paradoxe des anniversaires), le script montre qu'à partir de combien de personnes la probabilité qu'au moins deux partagent leur date d'anniversaire dépasse 50 % ?

- A. 183
 B. 23 (bonne réponse)
 C. 50
 D. 365

Justification : C'est le résultat classique du paradoxe des anniversaires, bien plus petit qu'on ne l'imagine intuitivement.

7. Dans l'exercice 4, combien de mots de passe de 4 lettres majuscules suivies de 2 chiffres existe-t-il ?

- A. 45 697 600 (bonne réponse)
 B. 676 000
 C. $26^4 \times 10^2$ (même valeur, autre écriture)
 D. 456 976

Justification : $26^4 \times 10^2 = 456\,976 \times 100 = 45\,697\,600$.

8. Dans l'exercice 5 (urne de 5 rouges, 4 vertes, 3 bleues, tirage de 3 boules), quelle est la probabilité de tirer 3 boules de la même couleur ?

- A. $\frac{41}{55}$
 B. $\frac{3}{44}$ (bonne réponse)
 C. $\frac{3}{11}$
 D. $\frac{7}{22}$

Justification : $\binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 10 + 4 + 1 = 15$ tirages favorables sur $\binom{12}{3} = 220$: $\frac{15}{220} = \frac{3}{44}$.

9. Dans l'exercice 6, combien de chemins de (0,0) à (4,3) évitent le point (2,1) ?

- A. 18
 B. 12
 C. 17 (bonne réponse)
 D. 35

Justification : Nombre total de chemins $\binom{7}{3} = 35$, moins ceux passant par (2,1) ($\binom{3}{1} \times \binom{4}{2} = 18$) : $35 - 18 = 17$.

10. Dans l'exercice 7, dans un championnat de 20 équipes avec matchs aller-retour, combien de matchs au total ?

A. 380 (**bonne réponse**)

B. 20

C. 400

D. 190

Justification : $\binom{20}{2} = 190$ rencontres, chacune jouée deux fois (aller-retour) : $190 \times 2 = 380$.