

Fiche 3 : triangle de Pascal, binôme de Newton et démonstrations

Neuf exercices sur la partie « théorique » du chapitre :

- construire le triangle de Pascal ;
- démontrer la relation de Pascal de deux façons (par le calcul et par dénombrement) ;
- démontrer que la somme des coefficients vaut 2^n ;
- développer avec la formule du binôme ;
- calculer des sommes ;
- démontrer des identités par « double comptage » ;
- vérifier avec Python.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- hypothèses posées ;
- calcul factoriel détaillé ou argument de dénombrement clair ;
- conclusion.

Les deux façons de démontrer une identité sur les combinaisons

- **Par le calcul** : on écrit $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, on met au même dénominateur, on simplifie.
- **Par dénombrement (double comptage)** : on invente une situation, on la compte de **deux façons différentes**, les deux résultats sont égaux.

La seconde est souvent plus rapide et plus élégante. Mais elle demande de bien **définir l'ensemble compté**.

Les pièges classiques

- Dans le binôme, oublier les **signes** quand b est négatif $(-1)^k$.
- Se tromper d'exposant : le terme est $\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.
- Dans une preuve par dénombrement, **ne pas définir** l'ensemble que l'on compte.
- Oublier les conditions sur k dans la relation de Pascal ($0 \leq k \leq n-1$).

Le double comptage, c'est le plaisir de compter les invités d'un mariage par tables, puis par familles : le total ne change pas, mais la preuve est bien plus belle.

Exercice 1 (★) : construire le triangle de Pascal

Construire les lignes 0 à 7 du triangle de Pascal. En déduire $\binom{7}{3}$. Vérifier que la somme de la ligne 5 est 2^5 et celle de la ligne 7 est 2^7 .

Correction de l'exercice 1**Méthode**

On utilise $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et la relation de Pascal : chaque terme est la somme des deux termes situés au-dessus de lui.

Le triangle

- ligne 0 : 1
- ligne 1 : 1 1
- ligne 2 : 1 2 1
- ligne 3 : 1 3 3 1
- ligne 4 : 1 4 6 4 1
- ligne 5 : 1 5 10 10 5 1
- ligne 6 : 1 6 15 20 15 6 1
- ligne 7 : 1 7 21 35 35 21 7 1

Lecture

$$\binom{7}{3} = 35$$

Vérifications

Somme de la ligne 5 : $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$

Somme de la ligne 7 : $1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128 = 2^7$

Exercice 2 (★★) : la relation de Pascal par le calcul

Soient n et k des entiers avec $0 \leq k \leq n-1$. Montrer que :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Correction de l'exercice 2

On écrit les deux coefficients avec les factorielles :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

On met au même dénominateur $(k+1)!(n-k)!$. On utilise $(k+1)! = (k+1)k!$ et $(n-k)! = (n-k)(n-k-1)!$.

$$= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n![(k+1) + (n-k)]}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

Comme $(n+1) - (k+1) = n-k$, c'est exactement $\binom{n+1}{k+1}$.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \blacksquare$$

Exercice 3 (★★) : la relation de Pascal par dénombrement

Même énoncé qu'à l'exercice 2. On considère l'ensemble $E = \{1, 2, \dots, n+1\}$ et ses parties à $k+1$ éléments. Démontrer la relation de Pascal sans calcul.

Correction de l'exercice 3

Soit $E = \{1, 2, \dots, n+1\}$. Le nombre de parties de E à $k+1$ éléments est $\binom{n+1}{k+1}$. On les compte en séparant deux cas **disjoints**, selon que la partie contient ou non l'élément $n+1$.

Cas 1 : la partie contient $n+1$. Il faut choisir les k autres éléments parmi les n éléments $\{1, \dots, n\}$. Il y a $\binom{n}{k}$ parties.

Cas 2 : la partie ne contient pas $n+1$. Il faut choisir les $k+1$ éléments parmi $\{1, \dots, n\}$. Il y a $\binom{n}{k+1}$ parties.

Les deux cas sont disjoints et couvrent toutes les possibilités.

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \blacksquare$$

Exercice 4 (★★) : la somme des coefficients

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$, par dénombrement.

2. Démontrer que, pour $n \geq 1$: $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

3. En déduire que le nombre de parties de cardinal pair est égal à celui de cardinal impair, et vaut 2^{n-1} .

Correction de l'exercice 4

Question 1

Soit E un ensemble à n éléments.

Chaque partie de E a un cardinal k compris entre 0 et n .

Il y en a $\binom{n}{k}$ de cardinal k .

En sommant sur k , le nombre total de parties est $\sum \binom{n}{k}$.

Or E a 2^n parties (chaque élément est dans la partie ou non).

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \blacksquare$$

Question 2

D'après la formule du binôme avec $a = 1$ et $b = -1$:

$$0^n = (1 + (-1))^n = \sum \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = \sum (-1)^k \binom{n}{k}$$

Pour $n \geq 1$, $0^n = 0$.

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \blacksquare$$

Question 3

Notons P la somme des $\binom{n}{k}$ pour k pair. Notons I la somme des $\binom{n}{k}$ pour k impair. La question 1 donne $P + I = 2^n$. La question 2 donne $P - I = 0$. Donc $P = I = \frac{2^n}{2}$.

$$P = I = 2^{n-1} \blacksquare$$

Pour $n = 5$: 16 parties de cardinal pair et 16 de cardinal impair.

Exercice 5 (★★) : développer avec le binôme

1. Développer $(x + 1)^4$ et $(2x - 1)^5$.
2. Déterminer le coefficient de x^3 dans $(x + 2)^6$.
3. Déterminer le terme constant de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$.

Correction de l'exercice 5

Méthode

On utilise $(a + b)^n = \sum \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Question 1

Avec la ligne 4 du triangle (1 4 6 4 1) :

$$(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

Avec la ligne 5 (1 5 10 10 5 1), $a = 2x$ et $b = -1$:

$$(2x - 1)^5 = (2x)^5 - 5(2x)^4 + 10(2x)^3 - 10(2x)^2 + 5(2x) - 1$$

$$(2x - 1)^5 = 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$$

Question 2

Le terme général de $(x + 2)^6$ est $\binom{6}{k} x^{6-k} 2^k$. Le degré 3 correspond à $6 - k = 3$, donc $k = 3$.

$$\binom{6}{3} \times 2^3 = 20 \times 8.$$

Le coefficient de x^3 est 160.

Question 3

Le terme général de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ est $\binom{6}{k} x^{6-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \binom{6}{k} x^{6-2k}$. Il est constant si $6 - 2k = 0$, donc $k = 3$.

Le terme constant est $\binom{6}{3} = 20$.

Exercice 6 (★★★) : calculer des sommes

Pour $n \geq 1$, calculer (sommes pour k de 0 à n) :

1. $\sum \binom{n}{k} 2^k$

2. $\sum \binom{n}{k} 3^k$

3. $\sum \binom{n}{k} (-2)^k$

Correction de l'exercice 6

Méthode

On reconnaît la formule du binôme avec $a = 1$: $(1 + b)^n = \sum \binom{n}{k} b^k$.

Question 1

Avec $b = 2$: $\sum \binom{n}{k} 2^k = (1 + 2)^n$

$$3^n$$

Question 2

Avec $b = 3$: $\sum \binom{n}{k} 3^k = (1 + 3)^n$

$$4^n$$

Question 3

Avec $b = -2$: $\sum \binom{n}{k} (-2)^k = (1 - 2)^n$

$$(-1)^n$$

$$\text{Contrôle pour } n = 3 : 1 - 6 + 12 - 8 = -1 = (-1)^3$$

Exercice 7 (★★★) : l'identité $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$

1. Démontrer que, pour $1 \leq k \leq n$: $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
2. En déduire que $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$.
3. Retrouver ce résultat par dénombrement (comité avec un président).

Correction de l'exercice 7

Question 1

$$k \binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}$$

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} \quad \blacksquare$$

Question 2

Le terme $k = 0$ est nul. D'après la question 1 :

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}$$

d'après la somme des coefficients pour l'entier $n-1$.

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n \times 2^{n-1} \quad \blacksquare$$

$$\text{Pour } n = 4 : 0 + 4 + 12 + 12 + 4 = 32 = 4 \times 2^3$$

Question 3

Comptons les comités (parties de $\{1, \dots, n\}$) munis d'un président (un membre du comité désigné).

Première façon : on choisit un comité de k membres ($\binom{n}{k}$ façons), puis son président (k façons).

En sommant sur k , on obtient $\sum k \binom{n}{k}$.

Seconde façon : on choisit d'abord le président (n façons). Puis on décide pour chacun des $n-1$ autres membres s'il est dans le comité ou non (2^{n-1} façons).

Les deux comptages sont égaux.

$$\sum k \binom{n}{k} = n 2^{n-1} \blacksquare$$

Exercice 8 (★★★) : une identité de Vandermonde

Démontrer par dénombrement que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. Vérifier pour $n = 3$.

Correction de l'exercice 8

Soit E un ensemble de $2n$ éléments. Il est partagé en deux ensembles disjoints A et B de n éléments chacun. On compte les parties S de E à n éléments.

Première façon : il y en a $\binom{2n}{n}$.

Seconde façon : on classe les parties S selon $k = |S \cap A|$, avec $0 \leq k \leq n$. Une telle partie est déterminée par :

- le choix de k éléments de A : $\binom{n}{k}$ façons ;
- le choix de $n - k$ éléments de B : $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ façons.

Il y a donc $\binom{n}{k}^2$ parties pour chaque k . En tout : $\sum \binom{n}{k}^2$.

Les deux comptages sont égaux.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \blacksquare$$

$$\text{Vérification pour } n = 3 : 1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 = 20 = \binom{6}{3}$$

Exercice 9 (★★) : vérifier avec Python

1. Écrire une fonction `pascal(n)` qui renvoie la ligne n du triangle de Pascal sous forme de liste. On utilisera la relation de Pascal.

2. Écrire un test qui vérifie, pour n de 1 à 10 : la somme de la ligne n est 2^n ; $\sum \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Correction de l'exercice 9

Question 1

```
def pascal(n):
    ligne = [1]
    for i in range(n):
        nouvelle = [1]
        for k in range(len(ligne) - 1):
            nouvelle.append(ligne[k] + ligne[k + 1])
        nouvelle.append(1)
        ligne = nouvelle
    return ligne
```

Pour chaque nouvelle ligne, on ajoute deux 1 aux extrémités. Entre eux, on met les sommes de termes consécutifs de la ligne précédente. `pascal(6)` renvoie [1, 6, 15, 20, 15, 6, 1].

Question 2

```
from math import comb

for n in range(1, 11):
    l = pascal(n)
    assert sum(l) == 2**n
    assert sum(c**2 for c in l) == comb(2*n, n)
```

Aucune erreur n'est levée : les deux identités sont vérifiées pour n de 1 à 10.

Attention : un test sur quelques valeurs ne remplace pas une démonstration. Mais il permet de détecter une erreur de formule.

Ce qui peut tomber au bac

- La **relation de Pascal**, par le calcul ou par dénombrement (exercices 2 et 3).
- La **somme des coefficients** et ses conséquences (exercice 4).
- Des **développements** avec le binôme et la recherche d'un **coefficient** (exercice 5).
- Des **sommes** à reconnaître comme un binôme (exercice 6).
- Une **identité démontrée par double comptage** (exercices 7 et 8).
- Un **algorithme** de triangle de Pascal (exercice 9).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Quelle égalité est celle du triangle de Pascal ?

- A. $\binom{n}{k} \times \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
- B. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k}$
- C. $\binom{n}{k} - \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

D. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (**bonne réponse**)

Justification : Une partie à $k+1$ éléments de $\{1, \dots, n+1\}$ contient ou non l'élément $n+1$.

2. Quel est le développement de $(a+b)^3$?

A. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (**bonne réponse**)

B. $a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3$

C. $a^3 + b^3$

D. $a^3 + 3ab + b^3$

Justification : Formule du binôme : les coefficients sont $\binom{3}{k} = 1, 3, 3, 1$.

3. Que vaut $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$?

A. 2^n (**bonne réponse**)

B. n^2

C. $n!$

D. $2n$

Justification : C'est $(1+1)^n$, ou le nombre total de parties d'un ensemble à n éléments.

4. Quel est le coefficient de x^2 dans le développement de $(1+x)^5$?

A. 10 (**bonne réponse**)

B. 5

C. 20

D. 25

Justification : Le coefficient est $\binom{5}{2} = 10$.

5. Que vaut $\binom{6}{2} + \binom{6}{3}$?

A. 35 (**bonne réponse**)

B. 30

C. 36

D. 21

Justification : $15 + 20 = 35 = \binom{7}{3}$ (triangle de Pascal).

6. Dans l'exercice 1, en construisant le triangle de Pascal, que vaut $\binom{7}{3}$?

A. 56

B. 28

C. 35 (**bonne réponse**)

D. 21

Justification : On lit dans la ligne 7, colonne 3 du triangle de Pascal : $\binom{7}{3} = 35$.

7. Dans l'exercice 5, quel est le coefficient de x^3 dans le développement de $(x+2)^6$?

- A. 40
- B. 160 (**bonne réponse**)
- C. 80
- D. 20

Justification : Le terme en x^3 est $\binom{6}{3} x^3 2^3 = 20 \times 8 x^3 = 160 x^3$.

8. Dans l'exercice 6, que vaut $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$?

- A. 3^n (**bonne réponse**)
- B. $(-1)^n$
- C. 2^n
- D. 4^n

Justification : C'est le développement de $(1+2)^n = 3^n$ par la formule du binôme.

9. Dans l'exercice 7, quelle identité utilise-t-on pour démontrer $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$?

- A. Un dénombrement en deux temps : choisir k personnes puis un président parmi elles, ou l'inverse (**bonne réponse**)
- B. La formule du binôme
- C. La relation de Pascal directement
- D. Une récurrence sur k

Justification : On compte les comités de k personnes avec un président de deux façons différentes, ce qui donne l'égalité.

10. Dans l'exercice 8, l'identité de Vandermonde $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ est vérifiée pour $n=3$: que vaut chaque membre ?

- A. 15
- B. 27
- C. 9
- D. 20 (**bonne réponse**)

Justification : $\binom{3}{0}^2 + \binom{3}{1}^2 + \binom{3}{2}^2 + \binom{3}{3}^2 = 1 + 9 + 9 + 1 = 20$, et $\binom{6}{3} = 20$.