

Fiche 2 : les combinaisons

Dix exercices pour maîtriser les combinaisons :

- calculs de coefficients ;
- tirages simultanés ;
- mains de cartes ;
- comités avec contraintes ;
- chemins sur un quadrillage ;
- anagrammes ;
- suites de lancers ;
- parties d'un ensemble ;
- équations et vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- le modèle est justifié (« tirage simultané, sans ordre, sans remise ») ;
- les cas sont séparés proprement ;
- chaque facteur est expliqué ;
- le complémentaire est utilisé pour « au moins un » ;
- le résultat est conclu par une phrase.

Le modèle de rédaction avec des combinaisons

« Une main est un tirage simultané de 5 cartes parmi 32.

L'ordre ne compte pas et il n'y a pas de répétition.

Il y a donc $\binom{32}{5} = 201\,376$ mains.

Pour avoir exactement 3 cœurs : on choisit 3 cœurs parmi 8, puis 2 cartes parmi les 24 non-cœurs.

$\binom{8}{3} \times \binom{24}{2} = 56 \times 276 = 15\,456$ mains. »

- Précise « **sans ordre, sans remise** » pour justifier la combinaison.
- Pour une composition (« 3 cœurs et 2 autres »), **choisis séparément** chaque groupe puis **multiplie**.
- Pour « au moins un », **passe au complémentaire**.

Les pièges classiques

- Prendre un nombre de k -uplets d'éléments distincts quand l'ordre ne compte pas (résultat trop grand d'un facteur $k!$).
- Séparer « au moins deux » en cas qui se chevauchent.
- Oublier de multiplier les choix de groupes différents.
- Confondre $\binom{n}{k}$ avec $\binom{k}{n}$.

Une combinaison, c'est un comité : personne ne se soucie de savoir qui est arrivé en premier à la réunion.

Exercice 1 (★) : calculs de coefficients

Calculer :

- $\binom{6}{2}$
- $\binom{10}{3}$
- $\binom{8}{0}$
- $\binom{12}{10}$
- $\binom{7}{3}$
- $\binom{20}{18}$

Exercice 2 (★) : tirages simultanés

Question 1. Une urne contient 12 boules numérotées. On en tire 4 simultanément. Combien de tirages ?

Question 2. Combien de comités de 5 personnes parmi 20 ?

Question 3. Au loto, on choisit 5 numéros parmi 49 et 1 numéro chance parmi 10. Combien de grilles ?

Exercice 3 (★★) : les mains de cartes

On tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Le jeu contient 8 valeurs et 4 couleurs, dont 8 cœurs et 4 rois.

Combien de mains :

1. au total ?
2. avec exactement 3 cœurs ?
3. avec au moins un as ?
4. avec exactement 2 rois ?
5. formées de 4 cartes de même valeur (un carré) ?

Exercice 4 (★★) : les comités avec contraintes

Une classe compte 18 filles et 12 garçons. On forme un comité de 4 élèves.

Combien de comités :

1. au total ?
2. avec exactement 2 filles ?
3. avec au moins un garçon ?
4. avec au moins 3 filles ?

Exercice 5 (★★) : les chemins sur un quadrillage

On se déplace dans un quadrillage de $(0,0)$ à $(5,3)$. Les pas sont d'une unité, vers la droite ou vers le haut.

Combien de chemins :

1. au total ?
2. passant par le point $(2,1)$?

Exercice 6 (★★★) : les anagrammes

Combien d'anagrammes (avec ou sans sens) ont les mots :

1. MATHS ?
2. ANANAS ?
3. MISSISSIPPI ?

Exercice 7 (★★) : les suites de lancers

On lance une pièce 10 fois de suite.

Combien de séries de résultats :

1. au total ?
2. avec exactement 4 « pile » ?
3. avec au moins un « pile » ?
4. avec au plus 2 « pile » ?

Exercice 8 (★★) : les parties d'un ensemble

Soit E un ensemble à 5 éléments. Deux de ses éléments sont distingués : a et b .

Combien de parties de E :

1. au total ?
2. de cardinal pair ?
3. contenant a ?
4. contenant a et b ?
5. non vides ?

Exercice 9 (★★) : équations avec des combinaisons

Déterminer l'entier n tel que :

1. $\binom{n}{2} = 45$

2. $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 28$

3. $\binom{n}{3} = 20$

Exercice 10 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

2. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

3. $\binom{2n}{n} = 2\binom{n}{n}$.

4. $\sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} = 32$.

5. Pour n fixé, $\binom{n}{k}$ est croissant en k .

6. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Ce qui peut tomber au bac

- Des **tirages simultanés**, des **maines** et des **comités** avec composition imposée (exercices 2, 3, 4).
- Le **complémentaire** pour « au moins un » (exercices 3, 4, 7).
- Les **chemins** sur un quadrillage, avec ou sans passage obligé (exercice 5).
- Les **anagrammes** par choix de positions (exercice 6).
- Les **parties d'un ensemble** (exercice 8).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Que vaut $\binom{5}{2}$?

- A. 5
 - B. 10
 - C. 20
 - D. 25
2. Combien de comités de 3 personnes peut-on former parmi 8 ?
- A. 56
 - B. 336
 - C. 24
 - D. 512
3. Que vaut $\binom{10}{7}$?
- A. 120
 - B. 720
 - C. 70
 - D. 210
4. Combien de tirages simultanés de 2 cartes parmi 32 ?
- A. 496
 - B. 992
 - C. 1 024
 - D. 62
5. On choisit 2 filles parmi 5 et 3 garçons parmi 6. Combien de groupes possibles ?
- A. 30
 - B. 11
 - C. 200
 - D. 462
6. Dans l'exercice 2, au loto (5 numéros parmi 49 et 1 numéro chance parmi 10), combien de grilles différentes existe-t-il ?
- A. 1 906 884
 - B. 19 068 840
 - C. 49×10
 - D. 1 221 759
7. Dans l'exercice 4 (classe de 18 filles et 12 garçons, comité de 4), combien de comités contiennent au moins un garçon ?
- A. 27 405
 - B. 10 098

C. 12 852

D. 24 345

8. Dans l'exercice 5 (chemins sur un quadrillage de $(0,0)$ à $(5,3)$), combien de chemins existe-t-il au total ?
- A. 120
- B. 15
- C. 8
- D. 56
9. Dans l'exercice 6, combien d'anagrammes le mot ANANAS possède-t-il (3 A, 2 N, 1 S) ?
- A. 60
- B. 6
- C. 120
- D. 720
10. Dans l'exercice 9, quel entier n vérifie $\binom{n}{2} = 45$?
- A. $n = 8$
- B. $n = 10$
- C. $n = 45$
- D. $n = 9$