

Fiche 2 : les combinaisons

Dix exercices pour maîtriser les combinaisons :

- calculs de coefficients ;
- tirages simultanés ;
- mains de cartes ;
- comités avec contraintes ;
- chemins sur un quadrillage ;
- anagrammes ;
- suites de lancers ;
- parties d'un ensemble ;
- équations et vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- le modèle est justifié (« tirage simultané, sans ordre, sans remise ») ;
- les cas sont séparés proprement ;
- chaque facteur est expliqué ;
- le complémentaire est utilisé pour « au moins un » ;
- le résultat est conclu par une phrase.

Le modèle de rédaction avec des combinaisons

« Une main est un tirage simultané de 5 cartes parmi 32.

L'ordre ne compte pas et il n'y a pas de répétition.

Il y a donc $\binom{32}{5} = 201\,376$ mains.

Pour avoir exactement 3 cœurs : on choisit 3 cœurs parmi 8, puis 2 cartes parmi les 24 non-cœurs.

$\binom{8}{3} \times \binom{24}{2} = 56 \times 276 = 15\,456$ mains. »

- Précise « **sans ordre, sans remise** » pour justifier la combinaison.
- Pour une composition (« 3 cœurs et 2 autres »), **choisis séparément** chaque groupe puis **multiplie**.
- Pour « au moins un », **passe au complémentaire**.

Les pièges classiques

- Prendre un nombre de k -uplets d'éléments distincts quand l'ordre ne compte pas (résultat trop grand d'un facteur $k!$).
- Séparer « au moins deux » en cas qui se chevauchent.
- Oublier de multiplier les choix de groupes différents.
- Confondre $\binom{n}{k}$ avec $\binom{k}{n}$.

Une combinaison, c'est un comité : personne ne se soucie de savoir qui est arrivé en premier à la réunion.

Exercice 1 (★) : calculs de coefficients

Calculer :

- $\binom{6}{2}$
- $\binom{10}{3}$
- $\binom{8}{0}$
- $\binom{12}{10}$
- $\binom{7}{3}$
- $\binom{20}{18}$

Correction de l'exercice 1

Méthode

On utilise $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$ et la symétrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Calculs

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2}$$

$$\binom{6}{2} = 15$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6}$$

$$\binom{10}{3} = 120$$

$$\binom{8}{0} = 1$$

$$\binom{12}{10} = \binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{2}$$

$$\binom{12}{10} = 66$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6}$$

$$\binom{7}{3} = 35$$

$$\binom{20}{18} = \binom{20}{2} = \frac{20 \times 19}{2}$$

$$\binom{20}{18} = 190$$

Exercice 2 (★) : tirages simultanés

Question 1. Une urne contient 12 boules numérotées. On en tire 4 simultanément. Combien de tirages ?

Question 2. Combien de comités de 5 personnes parmi 20 ?

Question 3. Au loto, on choisit 5 numéros parmi 49 et 1 numéro chance parmi 10. Combien de grilles ?

Correction de l'exercice 2

Question 1

Un tirage simultané de 4 boules parmi 12 est une partie à 4 éléments (sans ordre, sans répétition). $\binom{12}{4}$.

Il y a 495 tirages.

Question 2

Un comité est une partie de 5 personnes parmi 20. $\binom{20}{5}$.

Il y a 15 504 comités.

Question 3

On choisit les 5 numéros : $\binom{49}{5} = 1\,906\,884$ façons (sans ordre). Puis le numéro chance : 10 choix. $1\,906\,884 \times 10$.

Il y a 19 068 840 grilles.

Exercice 3 (★★) : les mains de cartes

On tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Le jeu contient 8 valeurs et 4 couleurs, dont 8 cœurs et 4 rois.

Combien de mains :

1. au total ?
2. avec exactement 3 cœurs ?
3. avec au moins un as ?
4. avec exactement 2 rois ?
5. formées de 4 cartes de même valeur (un carré) ?

Correction de l'exercice 3

Question 1

Une main est une partie de 5 cartes parmi 32. $\binom{32}{5}$.

Il y a 201 376 mains.

Question 2

On choisit 3 cœurs parmi 8 : $\binom{8}{3} = 56$ façons. Puis 2 cartes parmi les 24 cartes non-cœurs : $\binom{24}{2} = 276$. 56×276 .

Il y a 15 456 mains.

Question 3

On passe au complémentaire.

Les mains sans as sont des parties de 5 cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as : $\binom{28}{5} = 98\,280$.

Les mains avec au moins un as sont donc au nombre de $201\,376 - 98\,280$.

Il y a 103 096 mains.

Question 4

On choisit 2 rois parmi 4 : $\binom{4}{2} = 6$. Puis 3 cartes parmi les 28 cartes non-rois : $\binom{28}{3} = 3\,276$. $6 \times 3\,276$.

Il y a 19 656 mains.

Question 5

On choisit la valeur du carré : 8 façons. Les 4 cartes de cette valeur sont alors fixées : 1 façon. Puis la cinquième carte parmi les 28 restantes. $8 \times 1 \times 28$.

Il y a 224 mains.

Exercice 4 (★★) : les comités avec contraintes

Une classe compte 18 filles et 12 garçons. On forme un comité de 4 élèves.

Combien de comités :

1. au total ?
2. avec exactement 2 filles ?
3. avec au moins un garçon ?
4. avec au moins 3 filles ?

Correction de l'exercice 4

Question 1

$$\binom{30}{4}$$

Il y a 27 405 comités.

Question 2

Deux filles parmi 18 : $\binom{18}{2} = 153$. Deux garçons parmi 12 : $\binom{12}{2} = 66$. 153×66 .

Il y a 10 098 comités.

Question 3

On passe au complémentaire. Les comités sans garçon (4 filles) sont au nombre de $\binom{18}{4} = 3\,060$. $27\,405 - 3\,060$.

Il y a 24 345 comités.

Question 4

« Au moins 3 filles » se partage en deux cas **disjoints**.

Exactement 3 filles (et 1 garçon) : $\binom{18}{3} \times \binom{12}{1} = 816 \times 12 = 9\,792$.

Exactement 4 filles : $\binom{18}{4} = 3\,060$.

$9\,792 + 3\,060$

Il y a 12 852 comités.

Exercice 5 (★★) : les chemins sur un quadrillage

On se déplace dans un quadrillage de $(0,0)$ à $(5,3)$. Les pas sont d'une unité, vers la droite ou vers le haut.

Combien de chemins :

1. au total ?
2. passant par le point $(2,1)$?

Correction de l'exercice 5

Question 1

Un chemin est une suite de 8 pas, dont 5 vers la droite et 3 vers le haut. Il est déterminé par le choix des 3 positions des pas « haut » parmi les 8. $\binom{8}{3}$.

Il y a 56 chemins.

Question 2

Un chemin passant par $(2,1)$ se décompose en deux parties.

De $(0,0)$ à $(2,1)$: 3 pas dont 1 vers le haut. $\binom{3}{1} = 3$ façons.

De $(2,1)$ à $(5,3)$: 5 pas dont 2 vers le haut. $\binom{5}{2} = 10$ façons.

D'après le principe multiplicatif : 3×10 .

Il y a 30 chemins.

Exercice 6 (★★★) : les anagrammes

Combien d'anagrammes (avec ou sans sens) ont les mots :

1. MATHS ?
2. ANANAS ?
3. MISSISSIPPI ?

Correction de l'exercice 6

Question 1

Les 5 lettres de MATHS sont distinctes. $5!$.

Il y a 120 anagrammes.

Question 2

ANANAS a 6 lettres : 3 A, 2 N, 1 S.

On choisit les 3 places des A parmi 6 : $\binom{6}{3} = 20$.

Puis les 2 places des N parmi les 3 places restantes : $\binom{3}{2} = 3$.

Le S prend la dernière place. 20×3 .

Il y a 60 anagrammes.

On retrouve $\frac{6!}{3!2!1!} = \frac{720}{12} = 60$.

Question 3

MISSISSIPPI a 11 lettres : 1 M, 4 I, 4 S, 2 P.

On place les 4 I : $\binom{11}{4} = 330$.

Puis les 4 S parmi les 7 places restantes : $\binom{7}{4} = 35$.

Puis les 2 P parmi les 3 restantes : $\binom{3}{2} = 3$.

Le M prend la dernière place. $330 \times 35 \times 3$.

Il y a 34 650 anagrammes.

Exercice 7 (★★) : les suites de lancers

On lance une pièce 10 fois de suite.

Combien de séries de résultats :

1. au total ?
2. avec exactement 4 « pile » ?
3. avec au moins un « pile » ?
4. avec au plus 2 « pile » ?

Correction de l'exercice 7

Question 1

Une série est un 10-uplet de $\{\text{pile}, \text{face}\}$. 2^{10} .

Il y a 1 024 séries.

Question 2

Une série avec exactement 4 « pile » est déterminée par le choix des 4 positions des « pile » parmi les 10. $\binom{10}{4}$.

Il y a 210 séries.

Question 3

Par complémentaire : une seule série n'a aucun « pile » (que des « face »). $1\,024 - 1$.

Il y a 1 023 séries.

Question 4

« Au plus 2 pile » se partage en trois cas disjoints : 0, 1 ou 2 « pile ». $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} = 1 + 10 + 45$.

Il y a 56 séries.

Exercice 8 (★★) : les parties d'un ensemble

Soit E un ensemble à 5 éléments. Deux de ses éléments sont distingués : a et b .

Combien de parties de E :

1. au total ?
2. de cardinal pair ?
3. contenant a ?
4. contenant a et b ?
5. non vides ?

Correction de l'exercice 8

Question 1

$$2^5$$

E a 32 parties.

Question 2

Les cardinaux pairs possibles sont 0, 2, 4. $\binom{5}{0} + \binom{5}{2} + \binom{5}{4} = 1 + 10 + 5$.

Il y a 16 parties de cardinal pair.

C'est la moitié des parties, comme prévu.

Question 3

Une partie contenant a est déterminée par le choix, pour chacun des 4 autres éléments, d'être dedans ou non. 2^4 .

Il y a 16 parties contenant a .

Question 4

Avec a et b dans la partie, il reste 3 éléments libres. 2^3 .

Il y a 8 parties contenant a et b .

Question 5

Toutes les parties sauf la partie vide. $32 - 1$.

Il y a 31 parties non vides.

Exercice 9 (★★) : équations avec des combinaisons

Déterminer l'entier n tel que :

1. $\binom{n}{2} = 45$

2. $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 28$

3. $\binom{n}{3} = 20$

Correction de l'exercice 9

Question 1

$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = 45$ équivaut à $n(n-1) = 90$, soit $n^2 - n - 90 = 0$, c'est-à-dire $(n-10)(n+9) = 0$. Comme $n \geq 2$:

$$n = 10$$

Question 2

$n + \frac{n(n-1)}{2} = 28$ équivaut à $2n + n^2 - n = 56$, soit $n^2 + n - 56 = 0$, c'est-à-dire $(n-7)(n+8) = 0$.

$$n = 7$$

Question 3

$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 20$ équivaut à $n(n-1)(n-2) = 120$. La fonction $n \mapsto n(n-1)(n-2)$ est strictement croissante pour $n \geq 2$. Et $6 \times 5 \times 4 = 120$.

$$n = 6$$

Exercice 10 (★★) : vrai ou faux**Justifier chaque réponse :**

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$

2. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$

3. $\binom{2n}{n} = 2\binom{n}{n}.$

4. $\sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} = 32.$

5. Pour n fixé, $\binom{n}{k}$ est croissant en k .

6. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$

Correction de l'exercice 10

Affirmation 1

Choisir k éléments à garder revient à choisir les $n - k$ éléments à écarter.**Vrai.**

Affirmation 2

Il y a $\frac{n!}{(n-k)!}$ k -uplets d'éléments distincts. Chaque combinaison correspond à $k!$ de ces k -uplets.**Vrai.**

Affirmation 3

Pour $n = 2$: $\binom{4}{2} = 6$ et $2\binom{2}{2} = 2.$ **Faux.**

Affirmation 4

La somme des $\binom{5}{k}$ est le nombre de parties d'un ensemble à 5 éléments : $2^5 = 32$. $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32.$ **Vrai.**

Affirmation 5

Par exemple pour $n = 4$: 1, 4, 6, 4, 1. La suite croît puis décroît (symétrie).**Faux.**

Affirmation 6

C'est la relation de Pascal.

Vrai.

Ce qui peut tomber au bac

- Des **tirages simultanés**, des **maines** et des **comités** avec composition imposée (exercices 2, 3, 4).
- Le **complémentaire** pour « au moins un » (exercices 3, 4, 7).
- Les **chemins** sur un quadrillage, avec ou sans passage obligé (exercice 5).
- Les **anagrammes** par choix de positions (exercice 6).
- Les **parties d'un ensemble** (exercice 8).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Que vaut $\binom{5}{2}$?

- A. 5
- B. 10 (**bonne réponse**)
- C. 20
- D. 25

Justification : $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10.$

2. Combien de comités de 3 personnes peut-on former parmi 8 ?

- A. 56 (**bonne réponse**)
- B. 336
- C. 24
- D. 512

Justification : L'ordre ne compte pas : $\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 56.$

3. Que vaut $\binom{10}{7}$?

- A. 120 (**bonne réponse**)
- B. 720
- C. 70
- D. 210

$$\text{Justification : } \binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = 120.$$

4. Combien de tirages simultanés de 2 cartes parmi 32 ?

- A. 496 (**bonne réponse**)
- B. 992
- C. 1 024
- D. 62

$$\text{Justification : } \binom{32}{2} = \frac{32 \times 31}{2} = 496.$$

5. On choisit 2 filles parmi 5 et 3 garçons parmi 6. Combien de groupes possibles ?

- A. 30
- B. 11
- C. 200 (**bonne réponse**)
- D. 462

$$\text{Justification : } \binom{5}{2} \times \binom{6}{3} = 10 \times 20 = 200 \text{ (principe multiplicatif).}$$

6. Dans l'exercice 2, au loto (5 numéros parmi 49 et 1 numéro chance parmi 10), combien de grilles différentes existe-t-il ?

- A. 1 906 884
- B. 19 068 840 (**bonne réponse**)
- C. 49×10
- D. 1 221 759

$$\text{Justification : } \binom{49}{5} \times 10 = 1\,906\,884 \times 10 = 19\,068\,840.$$

7. Dans l'exercice 4 (classe de 18 filles et 12 garçons, comité de 4), combien de comités contiennent au moins un garçon ?

- A. 27 405
- B. 10 098
- C. 12 852
- D. 24 345 (**bonne réponse**)

$$\text{Justification : Événement contraire : « aucun garçon », soit } \binom{18}{4} = 3\,060 \text{ comités ; donc au moins un garçon : } 27\,405 - 3\,060 = 24\,345.$$

8. Dans l'exercice 5 (chemins sur un quadrillage de (0,0) à (5,3)), combien de chemins existe-t-il au total ?

- A. 120
- B. 15

C. 8

D. 56 (**bonne réponse**)

Justification : Un chemin est une suite de 5 pas « droite » et 3 pas « haut » : $\binom{8}{5} = 56$.

9. Dans l'exercice 6, combien d'anagrammes le mot ANANAS possède-t-il (3 A, 2 N, 1 S) ?

A. 60 (**bonne réponse**)

B. 6

C. 120

D. 720

Justification : $\frac{6!}{3! \times 2! \times 1!} = \frac{720}{12} = 60$.

10. Dans l'exercice 9, quel entier n vérifie $\binom{n}{2} = 45$?

A. $n = 8$ B. $n = 10$ (**bonne réponse**)C. $n = 45$ D. $n = 9$

Justification : $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = 45 \iff n(n-1) = 90 \iff n = 10$.