

Fiche 1 : principes de dénombrement, k-uplets, permutations

Dix exercices pour maîtriser les bases du dénombrement :

- principe multiplicatif ;
- k -uplets ;
- k -uplets d'éléments distincts ;
- permutations ;
- nombres à former avec contraintes ;
- cardinal d'une réunion ;
- complémentaire et « au moins un » ;
- applications entre ensembles ;
- factorielles et vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- le modèle est justifié en français (« on choisit successivement... ») ;
- l'ordre et la répétition sont précisés ;
- le calcul est détaillé ;
- le résultat est conclu par une phrase.

Le modèle de rédaction d'un dénombrement

« Un code est une suite ordonnée de 4 chiffres, pouvant se répéter.

C'est un 4-uplet d'éléments de $\{0,1,\dots,9\}$.

Pour chacun des 4 chiffres, il y a 10 choix.

D'après le principe multiplicatif, il y a $10^4 = 10\,000$ codes. »

- Dis **ce que tu comptes** et le **modèle** (ordre ? répétition ?).
- Justifie **chaque facteur** du produit.
- Conclut par une **phrase** avec le nombre trouvé.

Les pièges classiques

- Donner un résultat sans dire quel modèle a été utilisé.
- Oublier une contrainte (premier chiffre non nul, lettres distinctes...).
- Additionner quand il fallait multiplier, ou l'inverse.
- Compter deux fois des cas qui se chevauchent.

Un dénombrement sans phrase d'explication, c'est un tour de magie : le résultat est là, mais le correcteur veut voir le truc.

Exercice 1 (★) : le principe multiplicatif

Question 1. Un menu comprend une entrée (3 choix), un plat (4 choix) et un dessert (2 choix). Combien de menus ?

Question 2. On dispose de 5 tee-shirts, 4 pantalons et 3 paires de chaussures. Combien de tenues peut-on former ?

Question 3. Une plaque d'immatriculation est de la forme LL-CCC-LL.

L désigne une lettre parmi 26, C un chiffre.

Il n'y a aucune autre restriction.

Combien de plaques ?

Correction de l'exercice 1

Question 1

On choisit successivement l'entrée, le plat, le dessert.

Il y a 3, puis 4, puis 2 possibilités, quels que soient les choix précédents.

D'après le principe multiplicatif : $3 \times 4 \times 2$.

Il y a 24 menus.

Question 2

On choisit un tee-shirt (5), un pantalon (4), des chaussures (3). $5 \times 4 \times 3$.

Il y a 60 tenues.

Question 3

Une plaque est une suite de 4 lettres et de 3 chiffres, avec répétitions possibles. Chaque lettre a 26 choix, chaque chiffre a 10 choix. $26^4 \times 10^3 = 456\,976 \times 1\,000$.

Il y a 456 976 000 plaques.

Exercice 2 (★) : les k -uplets

1. Combien de codes de digicode à 4 chiffres ?
2. Combien de ces codes contiennent au moins un 7 ?
3. Combien de « mots » de 5 lettres (sans souci du sens) ?
4. Combien d'applications de $\{1,2,3,4\}$ dans $\{a,b,c\}$?

Correction de l'exercice 2

Question 1

Un code est un 4-uplet de chiffres, avec répétitions possibles. 10^4 .

Il y a 10 000 codes.

Question 2

On passe au complémentaire.

Les codes sans aucun 7 sont des 4-uplets de $\{0,1,2,3,4,5,6,8,9\}$, soit 9 chiffres. $9^4 = 6\,561$.

Donc les codes contenant au moins un 7 sont au nombre de $10\,000 - 6\,561$.

Il y a 3 439 codes avec au moins un 7.

Question 3

Un mot est un 5-uplet de lettres. 26^5 .

Il y a 11 881 376 mots.

Question 4

Une application est déterminée par l'image de chacun des 4 éléments de départ. Chaque image a 3 choix. 3^4 .

Il y a 81 applications.

Exercice 3 (★★) : k -uplets d'éléments distincts

Question 1. Combien de podiums (1er, 2e, 3e) possibles avec 8 coureurs ?

Question 2. Un bureau (président, secrétaire, trésorier) est à choisir parmi 12 membres. Une personne ne cumule pas deux postes. Combien de bureaux ?

Question 3. Combien de mots de 4 lettres toutes distinctes ?

Correction de l'exercice 3

Méthode

L'ordre compte (les rangs ou les postes sont différents). Il n'y a pas de répétition. Ce sont donc des k -uplets d'éléments distincts.

Question 1

8 choix pour le 1er, puis 7 pour le 2e, puis 6 pour le 3e. $8 \times 7 \times 6$.

Il y a 336 podiums.

Question 2

$12 \times 11 \times 10$

Il y a 1 320 bureaux.

Question 3

$26 \times 25 \times 24 \times 23$

Il y a 358 800 mots.

Exercice 4 (★★) : permutations avec contraintes

Six personnes sont placées en file. Trois sont des filles, trois sont des garçons.

Combien y a-t-il de files :

1. sans contrainte ?
2. si filles et garçons alternent ?
3. si deux personnes précises A et B sont côte à côte ?
4. si A et B ne sont pas côte à côte ?

Correction de l'exercice 4

Question 1

Une file est une permutation des 6 personnes. $6!$.

Il y a 720 files.

Question 2

Il y a deux schémas d'alternance : FGFGFG ou GFGFGF. Dans chaque schéma :

- $3!$ façons de placer les 3 filles ;
- $3!$ façons de placer les 3 garçons.

$$2 \times 3! \times 3! = 2 \times 36$$

Il y a 72 files.

Question 3

On regroupe A et B en un bloc.

On permute alors 5 objets (le bloc et les 4 autres personnes) : $5! = 120$ façons.

Dans le bloc, A et B peuvent être dans 2 ordres. $5! \times 2$.

Il y a 240 files.

Question 4

Par complémentaire : $720 - 240$.

Il y a 480 files.

Exercice 5 (★★) : former des nombres

1. Combien de nombres de 3 chiffres deux à deux distincts ?
2. Avec les chiffres 1,2,3,4,5,6 (sans répétition), combien de nombres pairs de 3 chiffres ?
3. Combien de nombres de 3 chiffres sont des multiples de 5 ?

Correction de l'exercice 5

Question 1

Le premier chiffre ne peut pas être 0 : 9 choix.

Le deuxième est différent du premier, mais peut être 0 : 9 choix.

Le troisième est différent des deux premiers : 8 choix. $9 \times 9 \times 8$.

Il y a 648 nombres.

Question 2

On commence par la contrainte.

Le dernier chiffre est pair : 2, 4 ou 6, soit 3 choix.

Le premier chiffre : 5 choix (les six chiffres sauf celui déjà utilisé).

Le deuxième : 4 choix. $3 \times 5 \times 4$.

Il y a 60 nombres pairs.

Question 3

Un multiple de 5 se termine par 0 ou 5 : 2 choix. Le premier chiffre est non nul : 9 choix. Le deuxième chiffre : 10 choix. $9 \times 10 \times 2$.

Il y a 180 multiples de 5.

Exercice 6 (★★) : cardinal d'une réunion

Dans une classe de 30 élèves :

- 18 font de l'anglais (A) ;
- 15 font de l'espagnol (E) ;
- 5 font les deux.

Combien d'élèves font :

1. au moins une des deux langues ?
2. aucune des deux ?
3. uniquement de l'anglais ?

Correction de l'exercice 6

Question 1

$$|A \cup E| = |A| + |E| - |A \cap E| = 18 + 15 - 5$$

28 élèves font au moins une langue.

Question 2

L'événement contraire de « au moins une langue » est « aucune ». $30 - 28$.

2 élèves ne font aucune langue.

Question 3

Ce sont les élèves de A qui ne sont pas dans E . $|A| - |A \cap E| = 18 - 5$.

13 élèves font uniquement de l'anglais.

Exercice 7 (★★) : « au moins un » et « tous distincts »

1. Combien de mots de 6 lettres contiennent au moins un A ?
2. Combien de digicodes à 4 chiffres ont leurs 4 chiffres distincts ?
3. Combien de digicodes à 4 chiffres ont au moins deux chiffres identiques ?

Correction de l'exercice 7

Question 1

Il y a 26^6 mots au total. Ceux qui ne contiennent aucun A sont des 6-uplets de 25 lettres : 25^6 . Par complémentaire : $26^6 - 25^6 = 308\,915\,776 - 244\,140\,625$.

Il y a 64 775 151 mots avec au moins un A.

Question 2

Les chiffres sont distincts : $10 \times 9 \times 8 \times 7$.

Il y a 5 040 codes.

Question 3

« Au moins deux chiffres identiques » est le contraire de « tous distincts ». $10\,000 - 5\,040$.

Il y a 4 960 codes.

Exercice 8 (★★) : applications et parties

Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{a, b, c\}$.

1. Combien d'applications de E dans F ?
2. Combien d'applications injectives de $\{1, 2, 3\}$ dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?
3. Combien de bijections de E dans E ?
4. Combien de parties de E ?
5. Existe-t-il une application injective de E dans F ?

Correction de l'exercice 8

Question 1

Chacun des 4 éléments de E a 3 images possibles. 3^4 .

Il y a 81 applications.

Question 2

Une injection associe à 1, 2, 3 des images deux à deux distinctes. $5 \times 4 \times 3$.

Il y a 60 injections.

Question 3

Une bijection de E dans E est une permutation de E . $4!$.

Il y a 24 bijections.

Question 4

Pour chaque élément de E , on choisit « dans la partie » ou « pas dans la partie ». 2^4 .

E a 16 parties.

Question 5

Une injection de E (4 éléments) dans F (3 éléments) enverrait 4 éléments distincts sur 3 éléments seulement. C'est impossible. On retrouve $3 \times 2 \times 1 \times 0 = 0$.

Non, il n'existe pas d'application injective de E dans F .

Exercice 9 (★★) : factorielles

1. Simplifier $\frac{n!}{(n-2)!}$ et $\frac{(n+2)!}{n!}$.

2. Montrer que $(n+1)! - n! = n \times n!$.

3. Résoudre, avec n entier naturel :

$$n(n-1) = 42$$

$$n(n-1)(n-2) = 60$$

Correction de l'exercice 9

Question 1

$$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}$$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1) \text{ (pour } n \geq 2)$$

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!}$$

$$\frac{(n+2)!}{n!} = (n+2)(n+1)$$

Question 2

$$(n+1)! - n! = (n+1)n! - n! = n!((n+1) - 1)$$

$$(n+1)! - n! = n \times n!$$

Question 3

$n(n-1) = 42$ équivaut à $n^2 - n - 42 = 0$, soit $(n-7)(n+6) = 0$. Comme n est un entier naturel :

$$n = 7$$

Pour $n(n-1)(n-2) = 60$: la fonction $n \mapsto n(n-1)(n-2)$ est strictement croissante sur les entiers $n \geq 2$. Et $5 \times 4 \times 3 = 60$.

$$n = 5 \text{ (unique solution)}$$

Exercice 10 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Pour tout entier $n \geq 1$, $n! = n \times (n-1)!$.
2. $0! = 0$.
3. Le nombre de mots de 3 lettres toutes distinctes est 26^3 .
4. Le nombre de k -uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments est toujours inférieur ou égal à n^k .
5. Pour deux ensembles finis A et B , $|A \cup B| = |A| + |B|$.
6. Le nombre de parties d'un ensemble à 10 éléments est $2^{10} = 1\,024$.

Correction de l'exercice 10

Affirmation 1

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1 = n \times (n-1)!$$

Vrai.

Affirmation 2

Par convention, $0! = 1$. C'est ce qui rend valides les formules avec $n!$ et $0!$, comme $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$.

Faux.

Affirmation 3

26^3 compte tous les mots de 3 lettres, avec répétitions. Avec des lettres distinctes : $26 \times 25 \times 24 = 15\,600$.

Faux.

Affirmation 4

Les k -uplets d'éléments distincts sont des k -uplets particuliers. Plus précisément, $n(n-1)\dots(n-k+1) \leq n^k$, car chaque facteur est $\leq n$.

Vrai.

Affirmation 5

Cette égalité n'est vraie que si A et B sont disjoints. En général : $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Faux.

Affirmation 6

Chacun des 10 éléments est dans la partie où n'y est pas. $2^{10} = 1\,024$.

Vrai.

Ce qui peut tomber au bac

- Le **principe multiplicatif** et les **k -uplets** pour des codes, mots, plaques (exercices 1 et 2).
- Les **k -uplets d'éléments distincts** et **permutations** avec contraintes (exercices 3 et 4).
- Le **passage au complémentaire** pour « au moins un » (exercices 2 et 7).
- Le **cardinal d'une réunion** (exercice 6).
- Les **applications** et les **parties** d'un ensemble (exercice 8).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Combien de mots de 3 lettres peut-on écrire avec 26 lettres, répétitions permises ?

- A. $26^3 = 17\,576$ (bonne réponse)
 B. $26 \times 25 \times 24 = 15\,600$

C. 78

D. $26!$

Justification : Chaque lettre a **26** choix indépendants : 26^3 .

2. Combien d'anagrammes (avec ou sans sens) du mot MATHS, dont les 5 lettres sont distinctes ?

A. 120 (**bonne réponse**)

B. 25

C. 5

D. 3 125

Justification : Permutations de 5 éléments : $5! = 120$.

3. De combien de façons peut-on ranger 6 personnes sur une file ?

A. 6

B. 120

C. 720 (**bonne réponse**)

D. 36

Justification : $6! = 720$.

4. Combien de codes à 4 chiffres existe-t-il (répétitions permises) ?

A. 10^4 (**bonne réponse**)

B. $10 \times 9 \times 8 \times 7$

C. 40

D. 5 040

Justification : Quatre choix indépendants parmi 10 chiffres.

5. Combien de codes à 4 chiffres tous distincts existe-t-il ?

A. 210

B. 10 000

C. 24

D. 5 040 (**bonne réponse**)

Justification : $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$ (arrangements).

6. Dans l'exercice 1, avec 3 entrées, 4 plats et 2 desserts, combien de menus complets peut-on former ?

A. 12

B. 6

C. 24 (**bonne réponse**)

D. 9

Justification : Principe multiplicatif : $3 \times 4 \times 2 = 24$.

7. Dans l'exercice 3, combien de podiums (1er, 2e, 3e) sont possibles avec 8 coureurs ?

- A. 56
- B. 24
- C. 336 (bonne réponse)
- D. 512

Justification : Ce sont des 3-uplets d'éléments distincts : $8 \times 7 \times 6 = 336$.

8. Dans l'exercice 4, avec 3 filles et 3 garçons en file, combien de files y a-t-il si les filles et les garçons alternent ?

- A. 36
- B. 12
- C. 720
- D. 72 (bonne réponse)

Justification : Deux façons de commencer (filles ou garçons), puis 3! façons de placer les filles et 3! pour les garçons : $2 \times 6 \times 6 = 72$.

9. Dans l'exercice 6 (classe de 30 élèves, 18 en anglais, 15 en espagnol, 5 dans les deux), combien d'élèves ne font aucune des deux langues ?

- A. 13
- B. 5
- C. 28
- D. 2 (bonne réponse)

Justification : Au moins une langue : $18 + 15 - 5 = 28$; donc aucune langue : $30 - 28 = 2$.

10. Dans l'exercice 9, quelle est la valeur de n telle que $n(n-1)(n-2) = 60$?

- A. $n = 6$
- B. $n = 4$
- C. $n = 5$ (bonne réponse)
- D. $n = 3$

Justification : $5 \times 4 \times 3 = 60$: c'est l'unique solution entière naturelle.