

Dénombrement : exercices type bac

Trois exercices complets, dans le style de l'épreuve du bac :

- une urne à trois couleurs avec tirage simultané puis successif et calculs de probabilités ;
- l'étude d'un ensemble de parties avec l'identité $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ et un dénombrement de « bureaux » ;
- un code d'accès avec contraintes et un script Python de vérification.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie de bac :

- Ω décrit ;
- équiprobabilité justifiée ;
- modèle précisé (ordre, remise) ;
- chaque facteur expliqué ;
- complémentaire utilisé pour « au moins un » ;
- probabilités simplifiées.

Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 30 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme le jour du bac.
- Pour chaque dénombrement, écris d'abord le **modèle** : ordre ? répétition ? tirage simultané ou successif ?
- Pour une probabilité, décris Ω et justifie l'**équiprobabilité**.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : une urne à trois couleurs

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher :

- 4 rouges ;
- 3 vertes ;
- 5 jaunes.

On tire simultanément 4 boules de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Calculer la probabilité de l'événement A : « obtenir exactement 2 boules rouges ».
3. Calculer la probabilité de l'événement B : « obtenir au moins une boule jaune ».
4. Calculer la probabilité de l'événement C : « obtenir exactement 2 boules jaunes ».
5. On tire maintenant successivement et sans remise 4 boules. Calculer la probabilité d'obtenir 4 boules rouges. Comparer avec le tirage simultané.

Exercice 2 : parties d'un ensemble et bureaux

Soit n un entier naturel non nul et E un ensemble à n éléments.

1. Combien E a-t-il de parties ? Justifier.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$: $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$. En déduire le nombre de parties de E de cardinal pair, pour $n = 10$.
3. Démontrer que, pour $1 \leq k \leq n$: $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
4. En déduire que $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}$.
5. Un club compte 10 membres.

Un « bureau » est un groupe non vide de membres dont l'un est désigné président.

Combien y a-t-il de bureaux ?

Vérifier avec un script Python.

Exercice 3 : un code d'accès

Un code d'accès est formé de :

- 2 lettres majuscules (parmi 26) ;
- suivies de 3 chiffres (parmi 0 à 9).

Par exemple : QX-407.

1. Combien y a-t-il de codes ?
2. Combien de codes ont leurs 2 lettres distinctes et leurs 3 chiffres distincts ?
3. Combien de codes contiennent au moins un chiffre 0 ?
4. Combien de codes ont leurs 3 chiffres strictement croissants (dans l'ordre de lecture) ?
5. On choisit un code au hasard.

Calculer la probabilité que ses 3 chiffres soient distincts.

Puis la probabilité qu'ils soient strictement croissants.

6. Écrire un script Python qui compte : les triplets de chiffres distincts ; les triplets strictement croissants ; ceux contenant au moins un 0. Comparer avec les résultats précédents.

Les réflexes à retenir

- Écris toujours le **modèle** (avec ou sans ordre, avec ou sans remise) avant de calculer.
- Pour une composition imposée : **choisis séparément** chaque groupe, puis **multiplie**.
- Pour « au moins un » : **complémentaire**.
- Pour une probabilité : décris Ω , justifie l'**équiprobabilité**, garde le **même modèle** partout.
- Pour une identité : **calcul factoriel** ou **double comptage**, en définissant l'ensemble compté.
- Vérifie avec **Python** sur de petits cas.

Aller plus loin avec les vrais sujets

Quand tu es à l'aise avec ce chapitre, entraîne-toi sur les exercices de dénombrement et de probabilités des sujets officiels des années précédentes.

Ils sont disponibles sur le site de l'[APMEP](https://apmep.fr/).

Chronomètre-toi et rédige comme le jour du bac.