

Dénombrement : exercices type bac

Trois exercices complets, dans le style de l'épreuve du bac :

- une urne à trois couleurs avec tirage simultané puis successif et calculs de probabilités ;
- l'étude d'un ensemble de parties avec l'identité $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ et un dénombrement de « bureaux » ;
- un code d'accès avec contraintes et un script Python de vérification.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie de bac :

- Ω décrit ;
- équiprobabilité justifiée ;
- modèle précisé (ordre, remise) ;
- chaque facteur expliqué ;
- complémentaire utilisé pour « au moins un » ;
- probabilités simplifiées.

Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 30 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme le jour du bac.
- Pour chaque dénombrement, écris d'abord le **modèle** : ordre ? répétition ? tirage simultané ou successif ?
- Pour une probabilité, décris Ω et justifie l'**équiprobabilité**.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : une urne à trois couleurs

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher :

- 4 rouges ;
- 3 vertes ;
- 5 jaunes.

On tire simultanément 4 boules de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Calculer la probabilité de l'événement A : « obtenir exactement 2 boules rouges ».
3. Calculer la probabilité de l'événement B : « obtenir au moins une boule jaune ».
4. Calculer la probabilité de l'événement C : « obtenir exactement 2 boules jaunes ».
5. On tire maintenant successivement et sans remise 4 boules. Calculer la probabilité d'obtenir 4 boules rouges. Comparer avec le tirage simultané.

Correction de la question 1

Un tirage simultané de 4 boules parmi 12 est une partie à 4 éléments d'un ensemble à 12 éléments (sans ordre, sans répétition). $\binom{12}{4} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{24}$.

Il y a 495 tirages possibles.

Correction de la question 2

Les boules sont indiscernables au toucher : les 495 tirages sont équiprobables.

Pour A :

- 2 boules rouges parmi 4 : $\binom{4}{2} = 6$ façons ;
- 2 boules parmi les 8 non rouges : $\binom{8}{2} = 28$ façons.

$$|A| = 6 \times 28 = 168$$

$$P(A) = \frac{168}{495} = \frac{56}{165} \approx 0,339$$

Correction de la question 3

On passe à l'événement contraire $\overline{B}$: « aucune boule jaune ». Ce sont les tirages de 4 boules parmi les 7 non jaunes : $\binom{7}{4} = 35$. $P(\overline{B}) = \frac{35}{495} = \frac{7}{99}$.

$$P(B) = 1 - \frac{7}{99} = \frac{92}{99} \approx 0,929$$

Correction de la question 4

Pour C :

- 2 boules jaunes parmi 5 : $\binom{5}{2} = 10$ façons ;
- 2 boules parmi les 7 non jaunes : $\binom{7}{2} = 21$ façons.

$$|C| = 10 \times 21 = 210$$

$$P(C) = \frac{210}{495} = \frac{14}{33} \approx 0,424$$

Correction de la question 5

Le tirage est successif sans remise. Ω est l'ensemble des 4-uplets de boules distinctes. $|\Omega| = 12 \times 11 \times 10 \times 9 = 11\,880$ (équiprobables).

Les 4-uplets de 4 boules rouges sont au nombre de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

$$P = \frac{24}{11\,880} = \frac{1}{495}$$

Comparaison. Pour le tirage simultané, il y a une seule partie formée des 4 boules rouges :

$$\binom{4}{4} = 1. \quad P = \frac{1}{495}.$$

On obtient la même probabilité.

C'est cohérent : ordonner les tirages ne change pas la probabilité d'un événement qui ne dépend pas de l'ordre.

Points clés attendus pour l'exercice 1

- **Q1** : le modèle est nommé (partie à 4 éléments), calcul de $\binom{12}{4}$.
- **Q2** : équiprobabilité justifiée, deux choix séparés multipliés, fraction simplifiée.

- **Q3** : événement contraire correctement défini (aucune jaune), combinaison de 4 parmi 7, $P(B) = 1 - P(\overline{B})$.
- **Q4** : deux choix multipliés.
- **Q5** : Ω décrit avec ordre (4-uplets), dénombrement avec le même modèle, comparaison justifiée.

Exercice 2 : parties d'un ensemble et bureaux

Soit n un entier naturel non nul et E un ensemble à n éléments.

1. Combien E a-t-il de parties ? Justifier.

2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$: $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$. En déduire le nombre de parties de E de cardinal pair, pour $n = 10$.

3. Démontrer que, pour $1 \leq k \leq n$: $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

4. En déduire que $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}$.

5. Un club compte 10 membres.

Un « bureau » est un groupe non vide de membres dont l'un est désigné président.

Combien y a-t-il de bureaux ?

Vérifier avec un script Python.

Correction de la question 1

Pour former une partie de E , on décide pour chacun des n éléments s'il appartient à la partie ou non. 2 choix pour chaque élément. D'après le principe multiplicatif :

E a 2^n parties.

Correction de la question 2

D'après la formule du binôme avec $a = 1$ et $b = -1$:

$$0^n = (1 - 1)^n = \sum \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = \sum (-1)^k \binom{n}{k}$$

Comme $n \geq 1$, $0^n = 0$.

$$\sum (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Notons P la somme des $\binom{n}{k}$ pour k pair, et I celle pour k impair. On a $P - I = 0$ (ce qui précède). On a $P + I = 2^n$ (question 1). Donc $P = I = 2^{n-1}$.

Pour $n = 10$:

$2^9 = 512$ parties de cardinal pair.

Correction de la question 3

Pour $1 \leq k \leq n$:

$$k \binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)! (n-k)!}$$

Or $n! = n \times (n-1)!$ et $n-k = (n-1) - (k-1)$. Donc :

$$\frac{n!}{(k-1)! (n-k)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)! ((n-1) - (k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}$$

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} \blacksquare$$

Correction de la question 4

Le terme $k = 0$ est nul. D'après la question 3 :

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}$$

On pose $j = k - 1$. Cette somme vaut :

$$n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n \times 2^{n-1}$$

d'après la somme des coefficients (question 1 appliquée à un ensemble de $n-1$ éléments).

$$\sum k \binom{n}{k} = n \times 2^{n-1} \blacksquare$$

Correction de la question 5

Un bureau est :

- une partie non vide de k membres : $\binom{10}{k}$ choix ;

- munie d'un président choisi parmi ses k membres : k choix.

Le nombre de bureaux est donc $\sum_{k=1}^{10} k \binom{10}{k} = 10 \times 2^9$.

Il y a 5 120 bureaux.

Autre dénombrement. On choisit d'abord le président : 10 façons. Puis on décide pour chacun des 9 autres membres s'il fait partie du bureau ou non : $2^9 = 512$ façons. $10 \times 512 = 5\,120$

Script :

```
from math import comb

print(sum(k * comb(10, k) for k in range(1, 11)))
```

Le script affiche **5120**. Cela confirme le résultat.

Points clés attendus pour l'exercice 2

- **Q1** : choix « dedans » ou « dehors » pour chaque élément, principe multiplicatif.
- **Q2** : formule du binôme citée avec $a = 1$ et $b = -1$, système $P + I$ et $P - I$, valeur pour $n = 10$.
- **Q3** : calcul factoriel détaillé, conditions sur k mentionnées.
- **Q4** : terme $k = 0$ traité, changement d'indice $j = k - 1$ explicite, utilisation de la somme des coefficients.
- **Q5** : modèle « partie + président » décrit, deux dénombrements concordants, script cohérent avec le résultat.

Exercice 3 : un code d'accès

Un code d'accès est formé de :

- 2 lettres majuscules (parmi 26) ;
- suivies de 3 chiffres (parmi 0 à 9).

Par exemple : QX-407.

1. Combien y a-t-il de codes ?
2. Combien de codes ont leurs 2 lettres distinctes et leurs 3 chiffres distincts ?
3. Combien de codes contiennent au moins un chiffre 0 ?
4. Combien de codes ont leurs 3 chiffres strictement croissants (dans l'ordre de lecture) ?
5. On choisit un code au hasard.

Calculer la probabilité que ses 3 chiffres soient distincts.

Puis la probabilité qu'ils soient strictement croissants.

6. Écrire un script Python qui compte : les triplets de chiffres distincts ; les triplets strictement croissants ; ceux contenant au moins un 0. Comparer avec les résultats précédents.

Correction de la question 1

Un code est un couple de lettres suivi de 3 chiffres, avec répétitions possibles. $26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 = 26^2 \times 10^3 = 676 \times 1\,000$.

Il y a 676 000 codes.

Correction de la question 2

On choisit successivement :

- la première lettre : 26 choix ;
- la seconde, différente : 25 choix ;
- le premier chiffre : 10 choix ;
- le deuxième, différent : 9 choix ;
- le troisième, différent des deux premiers : 8 choix.

$$26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 = 650 \times 720$$

Il y a 468 000 codes.

Correction de la question 3

On passe au complémentaire. Les codes sans aucun 0 utilisent 9 chiffres possibles pour chacune des 3 positions : $26^2 \times 9^3 = 676 \times 729 = 492\,804$.

Le nombre de codes contenant au moins un 0 est donc $676\,000 - 492\,804$.

Il y a 183 196 codes.

On peut aussi écrire : $26^2 \times (10^3 - 9^3) = 676 \times 271$.

Correction de la question 4

Trois chiffres strictement croissants sont trois chiffres distincts rangés dans l'ordre croissant. Il suffit donc de choisir l'ensemble des 3 chiffres : son ordre est alors imposé.

Choix des chiffres : $\binom{10}{3} = 120$. Lettres quelconques : $26^2 = 676$. 676×120 .

Il y a 81 120 codes.

Correction de la question 5

Les 676 000 codes sont équiprobables (choix au hasard).

Chiffres distincts : $26^2 \times 10 \times 9 \times 8 = 676 \times 720$ codes.

$$P = \frac{676 \times 720}{676 \times 1\,000} = \frac{720}{1\,000} = 0,72$$

Chiffres strictement croissants : 676×120 codes.

$$P = \frac{120}{1\,000} = 0,12$$

Les lettres ne jouent aucun rôle dans ces deux probabilités : elles se simplifient.

Correction de la question 6

```

from itertools import product

distincts = 0
croissants = 0
avec_zero = 0
for c in product(range(10), repeat=3):
    if len(set(c)) == 3:
        distincts = distincts + 1
    if c[0] < c[1] and c[1] < c[2]:
        croissants = croissants + 1
    if 0 in c:
        avec_zero = avec_zero + 1

```

Le script parcourt les $10^3 = 1\,000$ triplets de chiffres.

Il donne 720, 120 et 271.

On retrouve :

- $10 \times 9 \times 8 = 720$ (question 2) ;
- $\binom{10}{3} = 120$ (question 4) ;
- $10^3 - 9^3 = 271$ (question 3).

Multipliés par 26^2 pour les lettres : $183\,196 = 676 \times 271$ et $81\,120 = 676 \times 120$.

Points clés attendus pour l'exercice 3

- **Q1** : choix successifs avec répétitions, principe multiplicatif.
- **Q2** : les cinq choix successifs sont justifiés (25, 9, 8 par « distinct »).
- **Q3** : complémentaire correctement défini (« aucun 0 »), résultat en $26^2 \times (10^3 - 9^3)$.
- **Q4** : idée « choisir l'ensemble, l'ordre est imposé » expliquée, $\binom{10}{3}$ utilisé.
- **Q5** : équiprobabilité justifiée, simplification par les lettres, valeurs 0,72 et 0,12.
- **Q6** : le script est correct et ses résultats sont reliés aux formules.

Les réflexes à retenir

- Écris toujours **le modèle** (avec ou sans ordre, avec ou sans remise) avant de calculer.
- Pour une composition imposée : **choisis séparément** chaque groupe, puis **multiplie**.
- Pour « au moins un » : **complémentaire**.
- Pour une probabilité : décris Ω , justifie l'**équiprobabilité**, garde le **même modèle** partout.
- Pour une identité : **calcul factoriel** ou **double comptage**, en définissant l'ensemble compté.
- Vérifie avec **Python** sur de petits cas.

Aller plus loin avec les vrais sujets

Quand tu es à l'aise avec ce chapitre, entraîne-toi sur les exercices de dénombrement et de probabilités des sujets officiels des années précédentes.

Ils sont disponibles sur le site de l'[APMEP](https://apmep.fr/).

Chronomètre-toi et rédige comme le jour du bac.