

Contrôle : chapitre 9, Dénombrement

Durée : 60 minutes. **Calculatrice** : autorisée. **Barème** : 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6 points) : Codes d'accès

Un casier est protégé par un code composé de **3** lettres choisies parmi les **26** lettres de l'alphabet, suivies de **2** chiffres choisis parmi **0, 1, ..., 9**. Par exemple, le code **KAB07** est un code possible. Les lettres et les chiffres peuvent se répéter, sauf mention contraire.

1. Déterminer le nombre de codes possibles. *(1 point)*
2. Déterminer le nombre de codes dont les trois lettres sont deux à deux distinctes. *(1 point)*
3. Déterminer le nombre de codes comportant au moins une fois la lettre A. *(2 points)*
4. Déterminer le nombre de codes dont les trois lettres sont deux à deux distinctes et dont les deux chiffres sont distincts et de même parité. *(2 points)*

Exercice 2 (7 points) : Constitution d'un comité

Une classe de Terminale compte **28** élèves : **16** filles et **12** garçons. Un comité de **5** élèves est constitué en choisissant simultanément **5** élèves de la classe. Les choix sont supposés équiprobables lorsqu'il est question de probabilités.

1. Déterminer le nombre de comités possibles. *(1 point)*
2. Déterminer le nombre de comités comportant exactement **2** filles. *(1,5 points)*
3. Déterminer le nombre de comités comportant au moins un garçon. *(1,5 points)*
4. Le comité est tiré au hasard. Calculer la probabilité qu'il comporte exactement **2** filles. Donner la valeur exacte sous forme de fraction irréductible, puis une valeur approchée à 10^{-3} près. *(1 point)*
5. Le comité doit en outre désigner un **président** et un **secrétaire**, deux membres distincts du comité. On appelle configuration un triplet (comité, président, secrétaire). Dénombrer les configurations de deux façons différentes et vérifier que les résultats coïncident. *(2 points)*

Exercice 3 (7 points) : Une formule sur les coefficients binomiaux

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et k un entier tel que $1 \leq k \leq n$. Le programme Python suivant est utilisé à la question 4.

```
from math import comb

def S(n):
    s = 0
    for k in range(1, n + 1):
        s = s + k * comb(n, k)
    return s

print(S(10))
```

1. Démontrer que $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$. (2 points)
2. Un groupe compte n personnes. On forme un comité de k membres dont l'un est désigné président. En dénombrant de deux façons ces configurations, retrouver l'égalité de la question 1. (1,5 points)
3. En déduire que $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$. (1,5 points)
4. Préciser ce que calcule la fonction $S(n)$, puis la valeur affichée par ce programme. Justifier. (1 point)
5. Déterminer le nombre de mots de longueur 5 écrits avec les lettres a et b qui comportent exactement trois lettres a . (1 point)