

Contrôle : chapitre 9, Dénombrement

Durée : 60 minutes. **Calculatrice** : autorisée. **Barème** : 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6 points) : Codes d'accès

Un casier est protégé par un code composé de **3** lettres choisies parmi les **26** lettres de l'alphabet, suivies de **2** chiffres choisis parmi **0, 1, ..., 9**. Par exemple, le code **KAB07** est un code possible. Les lettres et les chiffres peuvent se répéter, sauf mention contraire.

1. Déterminer le nombre de codes possibles. (1 point)
2. Déterminer le nombre de codes dont les trois lettres sont deux à deux distinctes. (1 point)
3. Déterminer le nombre de codes comportant au moins une fois la lettre A. (2 points)
4. Déterminer le nombre de codes dont les trois lettres sont deux à deux distinctes et dont les deux chiffres sont distincts et de même parité. (2 points)

Correction de l'exercice 1, question 1

Question 1 (1 point)

Un code est un 5-uplet : on choisit successivement **3** lettres (26 choix chacune) puis **2** chiffres (10 choix chacun).

D'après le principe multiplicatif, le nombre de codes est $26^3 \times 10^2 = 17\,576 \times 100$.

Il y a **1 757 600** codes possibles.

Barème : 1 point pour le modèle (choix successifs avec répétition) et le résultat.

Correction de l'exercice 1, question 2

Question 2 (1 point)

Le choix des lettres se fait sans répétition : $26 \times 25 \times 24 = 15\,600$ façons (arrangement de 3 lettres parmi 26).

Les chiffres restent quelconques : $10^2 = 100$ choix.

Il y a $15\,600 \times 100 = 1\,560\,000$ codes.

Barème : 0,5 point pour les $26 \times 25 \times 24$ choix de lettres distinctes ; 0,5 point pour la multiplication par 100 et le résultat.

Correction de l'exercice 1, question 3

Question 3 (2 points)

On passe par le **complémentaire** : le contraire de « au moins un A » est « aucun A ».

Les codes sans la lettre A se construisent avec 25 lettres possibles pour chacune des 3 positions : $25^3 \times 10^2 = 15\,625 \times 100 = 1\,562\,500$.

Le nombre de codes avec au moins un A est donc $1\,757\,600 - 1\,562\,500$.

Il y a 195 100 codes comportant au moins un A.

Barème : 0,5 point pour l'idée du complémentaire ; 1 point pour le dénombrement des codes sans A ; 0,5 point pour la soustraction et le résultat.

Correction de l'exercice 1, question 4

Question 4 (2 points)

Lettres : $26 \times 25 \times 24 = 15\,600$ choix.

Chiffres : on sépare deux cas **disjoints**. Les deux chiffres sont pairs : $5 \times 4 = 20$ couples (choix du premier parmi $\{0, 2, 4, 6, 8\}$, puis du second parmi les 4 restants). Les deux chiffres sont impairs : de même $5 \times 4 = 20$ couples.

D'après le principe additif, il y a $20 + 20 = 40$ couples de chiffres convenables.

Le nombre de codes est $15\,600 \times 40 = 624\,000$.

Barème : 0,5 point pour les lettres distinctes ; 1 point pour les deux cas (pairs, impairs) et leur somme ; 0,5 point pour le produit final.

Exercice 2 (7 points) : Constitution d'un comité

Une classe de Terminale compte 28 élèves : 16 filles et 12 garçons. Un comité de 5 élèves est constitué en choisissant simultanément 5 élèves de la classe. Les choix sont supposés équiprobables lorsqu'il est question de probabilités.

1. Déterminer le nombre de comités possibles. (1 point)
2. Déterminer le nombre de comités comportant exactement 2 filles. (1,5 points)
3. Déterminer le nombre de comités comportant au moins un garçon. (1,5 points)
4. Le comité est tiré au hasard. Calculer la probabilité qu'il comporte exactement 2 filles. Donner la valeur exacte sous forme de fraction irréductible, puis une valeur approchée à 10^{-3} près. (1 point)
5. Le comité doit en outre désigner un **président** et un **secrétaire**, deux membres distincts du comité. On appelle configuration un triplet (comité, président, secrétaire). Dénombrer les configurations de deux façons différentes et vérifier que les résultats coïncident. (2 points)

Correction de l'exercice 2, question 1

Question 1 (1 point)

Un comité est une partie à 5 éléments d'un ensemble de 28 élèves (l'ordre ne compte pas, pas de répétition).

Il y a $\binom{28}{5} = 98\,280$ comités possibles.

Barème : 0,5 point pour le modèle (combinaison) ; 0,5 point pour la valeur.

Correction de l'exercice 2, question 2

Question 2 (1,5 points)

On choisit les 2 filles parmi 16 : $\binom{16}{2} = 120$ façons.

Puis les 3 garçons parmi 12 : $\binom{12}{3} = 220$ façons.

D'après le principe multiplicatif : $120 \times 220 = 26\,400$ comités.

Barème : 0,5 point pour $\binom{16}{2}$; 0,5 point pour $\binom{12}{3}$; 0,5 point pour le produit.

Correction de l'exercice 2, question 3

Question 3 (1,5 points)

Le contraire de « au moins un garçon » est « aucun garçon », c'est-à-dire un comité de 5 filles : $\binom{16}{5} = 4\,368$ comités.

Il y a $98\,280 - 4\,368 = 93\,912$ comités comportant au moins un garçon.

Barème : 0,5 point pour le complémentaire ; 0,5 point pour $\binom{16}{5}$; 0,5 point pour le résultat.

Correction de l'exercice 2, question 4

Question 4 (1 point)

Les comités sont équiprobables : $P = \frac{26\,400}{98\,280}$.

En simplifiant par 120 : $P = \frac{220}{819}$ (fraction irréductible car $819 = 3^2 \times 7 \times 13$ et $220 = 2^2 \times 5 \times 11$).

$$P = \frac{220}{819} \approx 0,269.$$

Barème : 0,5 point pour le quotient cas favorables sur cas possibles ; 0,5 point pour la fraction irréductible et la valeur approchée.

Correction de l'exercice 2, question 5

Question 5 (2 points)

Première façon. On choisit d'abord le comité (98 280 façons), puis le président parmi ses 5 membres, puis le secrétaire parmi les 4 restants : $98\,280 \times 5 \times 4 = 1\,965\,600$.

Seconde façon. On choisit d'abord le président parmi les 28 élèves, puis le secrétaire parmi les 27 restants, puis les 3 autres membres du comité parmi les 26 élèves restants : $28 \times 27 \times \binom{26}{3} = 756 \times 2\,600 = 1\,965\,600$.

Les deux dénombrements donnent bien 1 965 600 configurations.

Barème : 0,75 point pour la première façon justifiée ; 0,75 point pour la seconde façon justifiée ; 0,5 point pour les calculs et la vérification.

Exercice 3 (7 points) : Une formule sur les coefficients binomiaux

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et k un entier tel que $1 \leq k \leq n$. Le programme Python suivant est utilisé à la question 4.

```
from math import comb

def S(n):
    s = 0
    for k in range(1, n + 1):
        s = s + k * comb(n, k)
    return s

print(S(10))
```

1. Démontrer que $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$. (2 points)
2. Un groupe compte n personnes. On forme un comité de k membres dont l'un est désigné président. En dénombrant de deux façons ces configurations, retrouver l'égalité de la question 1. (1,5 points)
3. En déduire que $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$. (1,5 points)
4. Préciser ce que calcule la fonction $S(n)$, puis la valeur affichée par ce programme. Justifier. (1 point)
5. Déterminer le nombre de mots de longueur 5 écrits avec les lettres a et b qui comportent exactement trois lettres a . (1 point)

Correction de l'exercice 3, question 1

Question 1 (2 points)

On utilise l'expression factorielle des coefficients binomiaux (valable car $1 \leq k \leq n$) :

$$k \binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)! (n-k)!} \text{ car } \frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}.$$

$$n \binom{n-1}{k-1} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)! ((n-1)-(k-1))!} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)! (n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)! (n-k)!}.$$

Les deux expressions sont égales : $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

Barème : 0,75 point pour le calcul de $k \binom{n}{k}$ avec simplification de $k/k!$; 0,75 point pour le calcul de $n \binom{n-1}{k-1}$ avec $n \times (n-1)! = n!$; 0,5 point pour la conclusion.

Correction de l'exercice 3, question 2

Question 2 (1,5 points)

Première façon. On choisit le comité ($\binom{n}{k}$ façons) puis son président parmi les k membres : $k\binom{n}{k}$ configurations.

Seconde façon. On choisit d'abord le président parmi les n personnes (n façons), puis les $k - 1$ autres membres parmi les $n - 1$ personnes restantes ($\binom{n-1}{k-1}$ façons) : $n\binom{n-1}{k-1}$ configurations.

Les deux dénombrements portent sur le même ensemble de configurations, d'où $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Barème : 0,5 point pour la première façon ; 0,5 point pour la seconde façon ; 0,5 point pour la conclusion.

Correction de l'exercice 3, question 3

Question 3 (1,5 points)

D'après la question 1 : $\sum_{k=1}^n k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n\binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}$.

Avec le changement d'indice $j = k - 1$ (qui varie de 0 à $n - 1$) : $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} =$

$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = 2^{n-1}$, car la somme des coefficients binomiaux de la ligne $n - 1$ du triangle de Pascal vaut 2^{n-1} (nombre de parties d'un ensemble à $n - 1$ éléments).

Donc $\sum_{k=1}^n k\binom{n}{k} = n 2^{n-1}$.

Barème : 0,5 point pour l'utilisation de la question 1 et la factorisation de n ; 0,5 point pour le changement d'indice ; 0,5 point pour la somme 2^{n-1} et la conclusion.

Correction de l'exercice 3, question 4

Question 4 (1 point)

La fonction $S(n)$ calcule la somme $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$ (la variable s accumule les termes $k \cdot \text{comb}(n, k)$).

D'après la question 3, $S(10)$ vaut $10 \times 2^9 = 10 \times 512$.

`print(S(10))` affiche **5120**.

Barème : 0,5 point pour ce que calcule $S(n)$; 0,5 point pour la valeur 5120 justifiée par la question 3.

Correction de l'exercice 3, question 5

Question 5 (1 point)

Un tel mot est entièrement déterminé par l'ensemble des **3** positions, parmi les **5** positions $\{1; 2; 3; 4; 5\}$, où se trouve la lettre **a** (les deux autres positions portent la lettre **b**). Les mots cherchés sont donc en correspondance avec les parties à **3** éléments de $\{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Leur nombre est $\binom{5}{3} = 10$.

*Barème : 0,5 point pour la correspondance entre mots et parties à **3** éléments ; 0,5 point pour le nombre $\binom{5}{3} = 10$.*

Récapitulatif du barème

Exercice	Points
Exercice 1	6
Exercice 2	7
Exercice 3	7
Total	20