

Guide de rédaction : calcul intégral

Ce guide complète le Guide de rédaction général.

Il rassemble, pour le chapitre Calcul intégral, **les quatorze situations qui reviennent au bac** et, pour chacune, la rédaction modèle.

Dans ce chapitre, la rédaction est très codifiée : un correcteur cherche des étapes précises, et chacune vaut des points.

Le principe du chapitre

Avec le calcul intégral, un correcteur regarde surtout **cinq choses** :

- la **primitive écrite et le crochet** avant tout remplacement ;
- la **justification du signe ou de la position relative** avant une aire ;
- la **rédaction complète d'une intégration par parties** (u' , v , u , v' , régularité, crochet) ;
- la **citation des propriétés** (linéarité, Chasles, croissance) ;
- la **conclusion avec l'unité d'aire**.

1. Les quatorze situations et leur rédaction modèle

Situation 1 : calculer une intégrale.

« f est continue sur $[0; 1]$. Elle est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$. Donc $F(x) = \ln(x^2 + 1)$ est une primitive de f . Alors :

$$\int_0^1 f(x) dx = \left[\ln(x^2 + 1) \right]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2. \text{ »}$$

Continuité, primitive, crochet, résultat.

Situation 2 : utiliser la linéarité et la relation de Chasles.

« Par linéarité de l'intégrale : $\int_0^2 (2f - 3g) = 2 \int_0^2 f - 3 \int_0^2 g = 2 \times 3 - 3 \times (-1) = 9$.

D'après la relation de Chasles : $\int_0^5 f = \int_0^2 f + \int_2^5 f = 3 + 4 = 7$. »

Nomme la propriété que tu utilises.

Situation 3 : signe et comparaison d'intégrales.

« Pour $x \in [0; 1]$, $x^2 \geq 0$ donc $e^{x^2} \geq 1$. Par croissance de l'intégrale ($0 \leq 1$) : $\int_0^1 e^{x^2} dx \geq \int_0^1 1 dx = 1$. »

Vérifie que les **bornes sont dans l'ordre** avant d'appliquer une inégalité.

Situation 4 : encadrer une intégrale.

« Pour $x \in [0; 1]$, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$. D'après l'inégalité de la moyenne sur $[0; 1]$ (longueur 1) : $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \leq 1$. »

Situation 5 : la valeur moyenne.

« La valeur moyenne de f sur $[0; 3]$ est $\mu = \frac{1}{3-0} \int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3} \times \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 3$. »

N'oublie pas le facteur $\frac{1}{b-a}$.

Situation 6 : l'aire sous une courbe.

« f est continue et positive sur $[0; 3]$ ($x^2 \geq 0$). L'aire du domaine est $A = \int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 9$ u.a. Comme une unité d'aire vaut $2 \times 3 = 6 \text{ cm}^2$, $A = 54 \text{ cm}^2$. »

Situation 7 : l'aire entre deux courbes.

« Les courbes se coupent en $x = 0$ et $x = 1$ ($x^2 = x \iff x(x-1) = 0$). Sur $[0; 1]$, $x \geq x^2$, donc la courbe de f est au-dessus de celle de g . L'aire est $A = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$ u.a. »

Intersections, position relative, haut – bas, primitive, crochet, résultat en u.a.

Situation 8 : une fonction de signe variable.

« $\sin x \geq 0$ sur $[0; \pi]$ et $\sin x \leq 0$ sur $[\pi; 2\pi]$. L'aire est $A = \int_0^\pi \sin x dx - \int_\pi^{2\pi} \sin x dx = 2 + 2 = 4$ u.a. (alors que $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$). »

Découpe aux points d'annulation et change le signe des parties négatives.

Situation 9 : une intégration par parties.

« On pose $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$. Alors $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0; 1]$. Par intégration par parties :

$$\int_0^1 x e^x dx = \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1. »$$

Écris u' , v , u , v' , puis la formule avec son crochet.

Situation 10 : deux intégrations par parties, ou le cas cyclique.

« Une première IPP donne $I = -J$. Une seconde donne $J = (e^\pi + 1) + I$. D'où $I = -(e^\pi + 1) - I$, donc $2I = -(e^\pi + 1)$ et $I = -\frac{e^\pi + 1}{2}$. »

Dans le cas cyclique, résous l'équation d'inconnue I .

Situation 11 : une fonction définie par une intégrale.

« La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc $F : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est la primitive de cette fonction qui s'annule en 0. F est dérivable et $F'(x) = e^{-x^2} > 0$. F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. »

Situation 12 : une suite d'intégrales.

« Pour $x \in [1; e]$, $0 \leq \ln x \leq 1$, donc $(\ln x)^{n+1} \leq (\ln x)^n$. Par croissance de l'intégrale, $I_{n+1} \leq I_n$: la suite est décroissante. Elle est minorée par 0 : elle converge. »

Compare les fonctions sous l'intégrale, puis intègre.

Situation 13 : la méthode des rectangles.

« g est croissante sur $[0; 1]$. Sur chaque intervalle de longueur h : $h g(x_k) \leq \int g \leq h g(x_{k+1})$. En additionnant : $S_g \leq \mathcal{A} \leq S_d$. L'amplitude est $S_d - S_g = h[g(1) - g(0)]$. »

Situation 14 : une équation à solution unique avec une aire.

« A est dérivable et $A' = f > 0$.

Donc A est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, de 0 à 3.

Comme $2,5 \in]0; 3[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $A(x) = 2,5$ admet une unique solution α . »

2. Avant / après sur le calcul intégral

a) Le calcul d'une intégrale.

« $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) = \ln 2.$ »

« $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \left[\ln(x^2+1) \right]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$ »

La première a oublié le crochet et les bornes : elle ne calcule pas $F(1) - F(0)$.

b) Une aire entre deux courbes.

« $A = \int_0^1 (x^2 - x) dx = -\frac{1}{6}$, donc $A = \frac{1}{6}.$ »

« Sur $[0; 1]$, $x \geq x^2$. $A = \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6}$ u.a. »

Le premier a soustrait dans le mauvais sens puis pris l'opposé : le signe se justifie avant de calculer.

c) Une intégration par parties.

« $\int x e^x dx = x e^x - e^x.$ »

« On pose $u'(x) = e^x$, $v(x) = x$; u, v sont C^1 sur $[0; 1]$. $\int_0^1 x e^x dx = \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1.$ »

d) Une aire à convertir.

« $A = 9.$ »

« $A = 9$ u.a. Comme $1 \text{ u.a.} = 2 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2$, $A = 54 \text{ cm}^2.$ »

3. Les erreurs de rédaction propres à ce chapitre

- Écrire une primitive **sans crochet** ni bornes.
- Parler d'aire pour une fonction de **signe variable** sans découper.
- Oublier de justifier la **position relative** de deux courbes.
- Une IPP **sans** u', v, u, v' ni régularité.
- Se tromper de signe devant la **nouvelle intégrale** dans une IPP.
- Oublier le facteur $\frac{1}{b-a}$ dans la valeur moyenne.
- Un résultat d'aire **sans unité** ou sans la conversion demandée.
- Comparer des **intégrales** avant d'avoir comparé les fonctions.

4. La check-list du chapitre Calcul intégral

- J'ai vérifié la **continuité** et écrit une **primitive**.
- J'ai écrit le **crochet** $\left[F(x)\right]_a^b$ avant de remplacer.
- Pour une aire, j'ai justifié le **signe** ou la **position relative**, écrit « **haut** – **bas** » et donné le résultat **en u.a.**
- Pour une IPP, j'ai posé u', v, u, v' et cité la régularité C^1 .
- J'ai **nommé les propriétés** utilisées (linéarité, Chasles, croissance).
- Pour une équation à solution unique, j'ai cité le **corollaire du TVI** avec ses hypothèses.
- Pour une suite d'intégrales, j'ai suivi le plan : **premiers termes, récurrence, positivité, monotonie, limite**.
- Ma **conclusion** donne la valeur exacte, la valeur approchée et l'unité.

Une intégrale sans crochet, c'est un trajet sans ticket : peut-être arrivé à bon port, mais impossible de le prouver.