

Calcul intégral

Nom : _____

Fiche Standard

Date : _____

Exercice S1 : Étude d'une fonction, primitive et aire

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

- Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$, puis interpréter graphiquement. On rappelle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
- Montrer que $f'(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$, puis dresser le tableau de variations de f (valeur exacte de l'extremum).
- Résoudre $f(x) = 0$ et en déduire le signe de f sur $]0; +\infty[$.
- a) Vérifier que $F(x) = \frac{\ln x}{x}$ est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.
b) Calculer $\int_1^e f(x) dx$ et $\int_e^{e^2} f(x) dx$.
c) En déduire l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$: valeur exacte, puis valeur approchée à 10^{-3} près.
- Pour $a \geq 1$, on pose $I(a) = \int_1^a f(x) dx$. Étudier les variations de I sur $[1; +\infty[$ sans calculer $I(a)$, puis déterminer la valeur maximale de I .

Exercice S2 : Une droite qui partage un domaine

Soit $f(x) = 2x - x^2$ et $\mathcal{C}$ sa courbe. On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses. Pour $m \in]0; 2[$, on note d_m la droite d'équation $y = mx$.

- Étudier le signe de f sur $[0; 2]$ et calculer l'aire de $\mathcal{D}$.
- Montrer que d_m et $\mathcal{C}$ ont deux points d'intersection, dont l'un est l'origine, et que l'autre a pour abscisse $2 - m$. Préciser la position relative de $\mathcal{C}$ et d_m entre ces deux points.
- Soit $\mathcal{D}_m$ le domaine délimité par $\mathcal{C}$ et d_m . Montrer que son aire vaut $\frac{(2 - m)^3}{6}$.
- Déterminer m pour que d_m partage $\mathcal{D}$ en deux domaines de même aire. Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

Exercice S3 : Intégrations par parties successives

- Calculer $K = \int_0^1 x^2 e^x dx$ à l'aide de deux intégrations par parties.
- On pose $A = \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx$ et $B = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx$.
a) Par intégration par parties, montrer que $A = e^{\pi/2} - B$.
b) Par une autre intégration par parties, montrer que $B = 1 + A$.
c) En déduire les valeurs exactes de A et de B .
d) Calculer la valeur moyenne de $x \mapsto e^x \cos x$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ (valeur approchée à 10^{-2} près).

Exercice S4 : Une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

- Calculer I_0 , puis $I_0 + I_1$. En déduire I_1 .
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. En déduire I_2 .
- Montrer que la suite (I_n) est décroissante et minorée par 0. Que peut-on en conclure ?

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Déterminer la limite de (I_n) .
5. On souhaite calculer I_n avec la fonction Python ci-dessous, dont une ligne est à compléter.

```
from math import log

def I(n):
    v = log(2)
    for k in range(n):
        v = .....
    return v
```

Écrire la ligne manquante. L'appel $I(10)$ renvoie 0,0475 (arrondi à 10^{-4}) : cette valeur est-elle compatible avec le résultat de la question 4 ?

Exercice S5 : Fonction définie par une intégrale

Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

- Justifier que F est dérivable sur $]0; +\infty[$ et exprimer $F'(x)$. En déduire le sens de variation de F et la valeur de $F(1)$.
- Soit $g(t) = \frac{e^t}{t}$. Montrer que g est croissante sur $[1; +\infty[$. En déduire que $e \leq F(2) \leq \frac{e^2}{2}$.
- Montrer que, pour tout réel $t > 0$, $e^t > t$ (on étudiera $t \mapsto e^t - t$). En déduire que $F(x) \geq x - 1$ pour tout $x \geq 1$, puis la limite de F en $+\infty$.
- Montrer que l'équation $F(x) = 2$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$ et que $\alpha \in]1; 2[$.

Exercice S6 : Concentration d'un médicament

Après une injection, la concentration (en mg/L) d'un médicament dans le sang, t heures après l'injection, est modélisée pour $t \geq 0$ par $C(t) = 4te^{-t/2}$.

- Étudier les variations de C sur $[0; +\infty[$. À quel instant la concentration est-elle maximale ? Quelle est sa valeur (exacte, puis approchée à 10^{-2} près) ?
- Pour $T \geq 0$, on pose $A(T) = \int_0^T C(t) dt$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $A(T) = 16 - (8T + 16)e^{-T/2}$.
- Calculer $A(6)$ (valeur exacte, puis approchée à 10^{-2} près), puis la concentration moyenne pendant les 6 premières heures. Cette valeur est-elle cohérente avec le résultat de la question 1 ?
- Déterminer la limite de $A(T)$ quand $T \rightarrow +\infty$ (on pourra poser $X = \frac{T}{2}$).
- On considère le programme suivant.

```
from math import exp

T = 0
while 16 - (8*T + 16)*exp(-T/2) < 15:
    T = T + 1
print(T)
```

Quelle valeur ce programme affiche-t-il ? Interpréter ce résultat (on justifiera avec les valeurs de $A(8)$ et $A(9)$).

Exercice S7 : Encadrer $\ln 2$ avec des rectangles

On rappelle que $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$. On partage $[1; 2]$ en n intervalles de même longueur $h = \frac{1}{n}$ et on note

S_g et S_d les sommes de rectangles à gauche et à droite pour $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. Justifier que f est décroissante sur $[1; 2]$, puis que $S_d \leq \ln 2 \leq S_g$.
2. Pour $n = 4$, calculer S_g et S_d (fractions irréductibles). En déduire un encadrement de $\ln 2$ et le comparer à 0,69.
3. Montrer que $S_g - S_d = \frac{1}{2n}$. Quelle valeur de n garantit un encadrement d'amplitude au plus 10^{-3} ?
4. On considère la fonction suivante.

```
def encadrement(n):
    h = 1/n
    sg = 0
    sd = 0
    for k in range(n):
        sg = sg + h/(1 + k*h)
        sd = sd + h/(1 + (k+1)*h)
    return sd, sg
```

Que représentent les deux valeurs renvoyées ? L'appel `encadrement(500)` renvoie (0,69265 ; 0,69365) à 10^{-5} près. Quelle valeur approchée de $\ln 2$ peut-on en déduire, et avec quelle précision ?

Exercice S8 : Vrai ou faux, type bac

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier.

1. $\int_0^1 (2x+1)e^{x^2+x} dx = e^2 - 1$.
2. Les courbes des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^3$ délimitent un domaine d'aire nulle, puisque $\int_{-1}^1 (x - x^3) dx = 0$.
3. La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2} dt$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. $G(0) \geq 0$ (où G est la fonction de l'affirmation précédente).

Exercice S9 : Aire entre deux courbes et limite

Pour $x \geq 0$, on pose $f(x) = (2x+1)e^{-2x}$ et $g(x) = e^{-2x}$.

1. Étudier la position relative des courbes de f et g sur $[0; +\infty[$.
2. Pour $a \geq 0$, calculer $J(a) = \int_0^a 2x e^{-2x} dx$ par une intégration par parties.
3. En déduire l'aire $A(a)$ du domaine délimité par les deux courbes et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$. Calculer $A(1)$ (valeur approchée à 10^{-3} près), puis la limite de $A(a)$ quand $a \rightarrow +\infty$.
4. Calculer $\int_0^1 f(x) dx$ en écrivant $f(x) = g(x) + 2x e^{-2x}$.

Exercice S10 : Intégrales trigonométriques

Soit $f(x) = \cos^2 x$.

1. Montrer que $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ pour tout réel x (on rappelle que $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$). En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$ et $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$. Vérifier que la somme obtenue est cohérente avec $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
3. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0; \pi]$.
4. Calculer $\int_0^{\pi/3} \sin x \cos^2 x dx$ (on reconnaîtra une forme $u'u^2$).