

Corrigé : Calcul intégral**Fiche Standard****S1.**

1. En $0 : 1 - \ln x \rightarrow +\infty$ et $x^2 \rightarrow 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$: la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale. En $+\infty : f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x} \rightarrow 0 - 0 = 0$: l'axe des abscisses est asymptote horizontale en $+\infty$.
2. Avec $u = 1 - \ln x$, $u' = -\frac{1}{x}$, $v = x^2$, $v' = 2x$:

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x} \times x^2 - (1 - \ln x) \times 2x}{x^4} = \frac{-3x + 2x \ln x}{x^4} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}.$$

Comme $x^3 > 0$, $f'(x)$ a le signe de $2 \ln x - 3$: $f'(x) \geq 0 \iff x \geq e^{3/2}$. De plus $f(e^{3/2}) = \frac{1 - \frac{3}{2}}{e^3} = -\frac{1}{2e^3}$.

x	0	$e^{3/2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f	$+\infty$	$-\frac{1}{2e^3}$	0

3. $f(x) = 0 \iff 1 - \ln x = 0 \iff x = e$. Comme $x^2 > 0$, $f(x)$ a le signe de $1 - \ln x$: $f > 0$ sur $]0; e[$, $f(e) = 0$, $f < 0$ sur $]e; +\infty[$.
4. a) $F'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = f(x)$.
- b) $\int_1^e f = \left[\frac{\ln x}{x} \right]_1^e = \frac{1}{e} - 0 = \frac{1}{e}$ et $\int_e^{e^2} f = \left[\frac{\ln x}{x} \right]_e^{e^2} = \frac{2}{e^2} - \frac{1}{e}$.
- c) $f \geq 0$ sur $[1; e]$ et $f \leq 0$ sur $[e; e^2]$. Par Chasles, avec un signe moins sur la partie négative :

$$A = \int_1^e f - \int_e^{e^2} f = \frac{1}{e} - \left(\frac{2}{e^2} - \frac{1}{e} \right) = \frac{2}{e} - \frac{2}{e^2} \approx 0,465 \text{ u.a.}$$

5. f est continue, donc I est dérivable sur $[1; +\infty[$ et $I'(a) = f(a)$. D'après la question 3, $I' \geq 0$ sur $[1; e]$ et $I' \leq 0$ sur $[e; +\infty[$: I est croissante puis décroissante, avec un maximum en $a = e$, égal à $I(e) = \int_1^e f = \frac{1}{e} \approx 0,368$.

Conclusion : limites $+\infty$ et 0 ; minimum $-\frac{1}{2e^3}$ en $e^{3/2}$; aire $\frac{2}{e} - \frac{2}{e^2} \approx 0,465$ u.a. ; maximum de I égal à $\frac{1}{e}$, atteint en $a = e$.

S2.

1. $f(x) = x(2 - x) \geq 0$ sur $[0; 2]$. L'aire de $\mathcal{D}$ est $\int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$ u.a.
2. $f(x) = mx \iff 2x - x^2 - mx = 0 \iff x(2 - m - x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2 - m$. Comme $m \in]0; 2[$, on a $2 - m \in]0; 2[$, donc $2 - m \neq 0$: deux points d'intersection. Sur $[0; 2 - m]$, $f(x) - mx = x(2 - m - x) \geq 0$: $\mathcal{C}$ est au-dessus de d_m .
3. Posons $c = 2 - m > 0$. Sur $[0; c]$, $\mathcal{C}$ est au-dessus de d_m , donc

$$\text{aire}(\mathcal{D}_m) = \int_0^c (cx - x^2) dx = \left[\frac{cx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^c = \frac{c^3}{2} - \frac{c^3}{3} = \frac{c^3}{6} = \frac{(2 - m)^3}{6}.$$

4. Sur $[0; 2-m]$, la droite d_m est au-dessus de l'axe (car $mx \geq 0$) et au-dessous de $\mathcal{C}$: $\mathcal{D}_m$ est la partie de $\mathcal{D}$ située au-dessus de d_m , et l'autre partie a pour aire $\frac{4}{3} - \frac{(2-m)^3}{6}$. Les deux aires sont égales si et seulement si $\frac{(2-m)^3}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$, soit $(2-m)^3 = 4$, soit $m = 2 - \sqrt[3]{4} \approx 0,41$. Ce nombre est bien dans $]0; 2[$ car $1 < \sqrt[3]{4} < 2$.

Conclusion : aire de $\mathcal{D}$ égale à $\frac{4}{3}$ u.a. ; $m = 2 - \sqrt[3]{4} \approx 0,41$.

S3.

1. Première IPP : $u'(x) = e^x$, $u(x) = e^x$; $v(x) = x^2$, $v'(x) = 2x$ (fonctions de classe $\mathcal{C}^1$).

$$K = \left[x^2 e^x \right]_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx = e - 2L, \quad L = \int_0^1 x e^x dx.$$

Seconde IPP avec $u' = e^x$, $v(x) = x$, $v' = 1$: $L = \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1$. Donc $K = e - 2 \approx 0,72$.

2. a) On pose $u'(x) = \cos x$, $u(x) = \sin x$; $v(x) = e^x$, $v'(x) = e^x$.

$$A = \left[e^x \sin x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx = e^{\pi/2} - B.$$

- b) On pose $u'(x) = \sin x$, $u(x) = -\cos x$; $v(x) = e^x$.

$$B = \left[-e^x \cos x \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx = (0 + 1) + A = 1 + A.$$

- c) En remplaçant : $A = e^{\pi/2} - (1 + A)$, donc $2A = e^{\pi/2} - 1$ et $A = \frac{e^{\pi/2} - 1}{2} \approx 1,91$. Alors

$$B = 1 + A = \frac{e^{\pi/2} + 1}{2} \approx 2,91.$$

- d) $\mu = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0} A = \frac{2}{\pi} \times \frac{e^{\pi/2} - 1}{2} = \frac{e^{\pi/2} - 1}{\pi} \approx 1,21$.

Conclusion : $K = e - 2$; $A = \frac{e^{\pi/2} - 1}{2}$, $B = \frac{e^{\pi/2} + 1}{2}$; $\mu \approx 1,21$.

S4.

1. $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \left[\ln(1+x) \right]_0^1 = \ln 2$. Par linéarité, $I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x} dx = 1$, donc $I_1 = 1 - \ln 2$.

2. $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$. Pour $n = 1$: $I_2 = \frac{1}{2} - I_1 = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

3. Pour $x \in [0; 1]$, $x^{n+1} \leq x^n$ et $1+x > 0$, donc $\frac{x^{n+1}}{1+x} \leq \frac{x^n}{1+x}$. Par croissance de l'intégrale ($0 \leq 1$), $I_{n+1} \leq I_n$. De plus l'intégrande est positif, donc $I_n \geq 0$. La suite est décroissante et minorée : elle converge.

4. Pour $x \in [0; 1]$, $1 \leq 1+x \leq 2$ donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$; en multipliant par $x^n \geq 0$: $\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$.

On intègre : $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Les deux membres extrêmes tendent vers 0 : par le théorème des gendarmes, $\lim I_n = 0$.

5. On a $I_{k+1} = \frac{1}{k+1} - I_k$; la ligne à écrire est $v = 1/(k+1) - v$. Pour $n = 10$: $\frac{1}{22} \approx 0,0455 \leq 0,0475 \leq \frac{1}{11} \approx 0,0909$: la valeur est compatible avec l'encadrement.

Conclusion : $I_0 = \ln 2$, $I_1 = 1 - \ln 2$, $I_2 = \ln 2 - \frac{1}{2}$; (I_n) décroissante, convergente de limite 0.

S5.

1. La fonction $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est continue sur $]0; +\infty[$: F en est la primitive qui s'annule en 1. Elle est dérivable et $F'(x) = \frac{e^x}{x} > 0$: F est strictement croissante, et $F(1) = 0$.
2. $g'(t) = \frac{e^t \times t - e^t \times 1}{t^2} = \frac{(t-1)e^t}{t^2} \geq 0$ pour $t \geq 1$: g est croissante sur $[1; +\infty[$. Donc, pour $t \in [1; 2]$, $g(1) \leq g(t) \leq g(2)$, soit $e \leq g(t) \leq \frac{e^2}{2}$. Par l'inégalité de la moyenne sur $[1; 2]$ (longueur 1) : $e \leq F(2) \leq \frac{e^2}{2}$.
3. Soit $h(t) = e^t - t$. $h'(t) = e^t - 1$ est négative sur $] -\infty; 0]$ et positive sur $[0; +\infty[$, donc h admet pour minimum $h(0) = 1 > 0$: $e^t > t$ pour tout réel t . Pour $t > 0$, on en déduit $g(t) = \frac{e^t}{t} > 1$. Pour $x \geq 1$, par croissance de l'intégrale, $F(x) = \int_1^x g(t) dt \geq \int_1^x 1 dt = x - 1$. Comme $x - 1 \rightarrow +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.
4. F est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$. On a $F(1) = 0 < 2$ et $F(2) \geq e > 2$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $F(x) = 2$ admet une unique solution α dans $[1; 2]$, et $\alpha \neq 1, 2$ donc $\alpha \in]1; 2[$. Comme F est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, elle est injective : il n'y a pas d'autre solution.

Conclusion : F strictement croissante, $F(1) = 0$, $e \leq F(2) \leq \frac{e^2}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F = +\infty$, et $F(x) = 2$ a une unique solution $\alpha \in]1; 2[$.

S6.

1. $C'(t) = 4e^{-t/2} + 4t \times \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-t/2} = 2(2-t)e^{-t/2}$. Comme $e^{-t/2} > 0$, C' a le signe de $2-t$: C est croissante sur $[0; 2]$, décroissante sur $[2; +\infty[$. Le maximum est atteint à $t = 2$ h : $C(2) = 8e^{-1} = \frac{8}{e} \approx 2,94$ mg/L.
2. On pose $u'(t) = e^{-t/2}$, $u(t) = -2e^{-t/2}$; $v(t) = 4t$, $v'(t) = 4$ (classe $\mathcal{C}^1$).

$$A(T) = \left[-8te^{-t/2} \right]_0^T + \int_0^T 8e^{-t/2} dt = -8Te^{-T/2} + \left[-16e^{-t/2} \right]_0^T = 16 - (8T + 16)e^{-T/2}.$$

3. $A(6) = 16 - 64e^{-3} \approx 12,81$. La concentration moyenne est $\frac{A(6)}{6} \approx 2,14$ mg/L. C'est cohérent : cette valeur est comprise entre le minimum 0 et le maximum $\approx 2,94$ de C sur $[0; 6]$.
4. $A(T) = 16 - 8Te^{-T/2} - 16e^{-T/2}$. Avec $X = \frac{T}{2}$, $Te^{-T/2} = \frac{2X}{e^X} \rightarrow 0$ par croissances comparées, et $e^{-T/2} \rightarrow 0$. Donc $\lim_{T \rightarrow +\infty} A(T) = 16$.
5. A est croissante sur $[0; +\infty[$ car $A' = C \geq 0$. On a $A(8) = 16 - 80e^{-4} \approx 14,53 < 15$ et $A(9) = 16 - 88e^{-4,5} \approx 15,02 \geq 15$. Le programme s'arrête donc à la première valeur entière de T telle que $A(T) \geq 15$: il affiche **9**. Interprétation : au bout de 9 heures, la quantité cumulée $\int_0^T C$ dépasse 15, soit plus de 93,75 % de sa limite 16.

Conclusion : maximum $\frac{8}{e} \approx 2,94$ mg/L à $t = 2$ h ; $A(T) = 16 - (8T + 16)e^{-T/2}$, $A(6) \approx 12,81$, moyenne $\approx 2,14$; limite 16 ; le programme affiche 9.

S7.

1. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$: f est décroissante. Sur chaque intervalle $[x_k; x_{k+1}]$ de longueur h , $f(x_{k+1}) \leq$

$f(x) \leq f(x_k)$, donc $h f(x_{k+1}) \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \leq h f(x_k)$. En additionnant (Chasles) : $S_d \leq \ln 2 \leq S_g$.

2. Pour $n = 4$, $h = \frac{1}{4}$, les valeurs de f sont $1, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{1}{2}$.

$$S_g = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{319}{105} = \frac{319}{420}, \quad S_d = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{533}{210} = \frac{533}{840}.$$

Donc $\frac{533}{840} \leq \ln 2 \leq \frac{319}{420}$, soit $0,634 \leq \ln 2 \leq 0,760$ (borne inférieure arrondie par défaut, borne supérieure par excès). Le nombre 0,69 appartient à cet encadrement, mais celui-ci est trop large pour permettre de conclure à 10^{-2} près.

3. Les deux sommes ont $n - 1$ termes communs : $S_g - S_d = h[f(1) - f(2)] = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2n}$. Cette amplitude est inférieure ou égale à 10^{-3} si et seulement si $2n \geq 1000$, soit $n \geq 500$.
4. Les points de subdivision sont $1 + kh$. **sg** est la somme à gauche S_g et **sd** la somme à droite S_d : la fonction renvoie $(S_d; S_g)$. Avec $n = 500$: $0,69265 \leq \ln 2 \leq 0,69365$. L'amplitude est 10^{-3} , donc tout nombre de cet intervalle est une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-3} près ; on retient $\ln 2 \approx 0,693$.

Conclusion : $\frac{533}{840} \leq \ln 2 \leq \frac{319}{420}$; amplitude $\frac{1}{2n}$, donc $n = 500$; $\ln 2 \approx 0,693$ à 10^{-3} près.

S8.

1. **Vrai.** Avec $u(x) = x^2 + x$, $u'(x) = 2x + 1$: l'intégrande est $u'e^u$, de primitive e^{x^2+x} . Donc $\int_0^1 (2x + 1)e^{x^2+x} dx = \left[e^{x^2+x} \right]_0^1 = e^2 - 1$.
2. **Faux.** $x = x^3 \iff x(1 - x^2) = 0 \iff x \in \{-1, 0, 1\}$. Sur $[-1; 0]$, $x^3 - x \geq 0$; sur $[0; 1]$, $x - x^3 \geq 0$. L'aire est

$$A = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ u.a.}$$

L'intégrale sur $[-1; 1]$ est nulle parce que les deux parties, de signes opposés, se compensent.

3. **Vrai.** La fonction $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G'(x) = \sqrt{1+x^2} \geq 1 > 0$: G est strictement croissante.
4. **Faux.** $G(1) = 0$ et G est strictement croissante, donc $G(0) < G(1) = 0$. Plus précisément, $\sqrt{1+t^2} \geq 1$ donne $G(0) = - \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt \leq -1$.

Conclusion : vrai, faux ($A = \frac{1}{2}$ u.a.), vrai, faux.

S9.

1. $f(x) - g(x) = 2xe^{-2x} \geq 0$ pour $x \geq 0$: la courbe de f est au-dessus de celle de g (elles se coupent seulement en $x = 0$).
2. On pose $u'(x) = e^{-2x}$, $u(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$; $v(x) = 2x$, $v'(x) = 2$ (classe $\mathcal{C}^1$).

$$J(a) = \left[-xe^{-2x} \right]_0^a + \int_0^a e^{-2x} dx = -ae^{-2a} + \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^a = \frac{1}{2} - \left(a + \frac{1}{2} \right) e^{-2a}.$$

3. Comme $f \geq g$, $A(a) = \int_0^a (f - g) = J(a) = \frac{1}{2} - \left(a + \frac{1}{2} \right) e^{-2a}$. Alors $A(1) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-2} \approx 0,297$ u.a.

Par croissances comparées, $ae^{-2a} \rightarrow 0$ et $e^{-2a} \rightarrow 0$, donc $\lim_{a \rightarrow +\infty} A(a) = \frac{1}{2}$.

4. $\int_0^1 g = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^1 = \frac{1 - e^{-2}}{2}$. Par linéarité, $\int_0^1 f = \frac{1 - e^{-2}}{2} + J(1) = \frac{1 - e^{-2}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-2} = \frac{1 - 2e^{-2}}{2} \approx 0,729$.

Conclusion : $A(a) = \frac{1}{2} - \left(a + \frac{1}{2}\right)e^{-2a}$, $A(1) \approx 0,297$ u.a., limite $\frac{1}{2}$; $\int_0^1 f = 1 - 2e^{-2}$.

S10.

1. $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$, donc $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$. Une primitive de f est $x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$.
2. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$. De même $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ et $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$. La somme vaut $\frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx$, ce qui est cohérent avec $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
3. $\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$.
4. $\sin x \cos^2 x = -u' u^2$ avec $u = \cos x$, de primitive $-\frac{\cos^3 x}{3}$:

$$\int_0^{\pi/3} \sin x \cos^2 x \, dx = \left[-\frac{\cos^3 x}{3} \right]_0^{\pi/3} = -\frac{1}{24} + \frac{1}{3} = \frac{7}{24}.$$

Conclusion : $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$; $\mu = \frac{1}{2}$; $\frac{7}{24}$.