

Calcul intégral**Fiche Défi**

Nom : _____

Date : _____

Exercice D1 : Démonstration du programme : l'aire est une primitive

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a; b]$ (avec $a < b$). Pour $x \in [a; b]$, on note $F(x)$ l'aire (en unités d'aire) du domaine compris entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $t = a$ et $t = x$, c'est-à-dire $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

1. Soit $x \in [a; b]$ et $h > 0$ tel que $x + h \leq b$. Interpréter $F(x + h) - F(x)$ comme une aire, puis justifier, en comparant avec deux rectangles de largeur h , que

$$h f(x) \leq F(x + h) - F(x) \leq h f(x + h).$$

2. En déduire que F est dérivable à droite en x et que $F'_d(x) = f(x)$.
3. Soit $x \in]a; b]$ et $h > 0$ tel que $x - h \geq a$. Montrer de même que $h f(x - h) \leq F(x) - F(x - h) \leq h f(x)$, puis que F est dérivable à gauche en x avec $F'_g(x) = f(x)$. Conclure que F est dérivable sur $[a; b]$ et que $F' = f$.
4. Soit G une primitive quelconque de f sur $[a; b]$. Montrer que $\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$.
5. Application : pour $f(t) = t$ sur $[0; +\infty[$, déterminer géométriquement $F(x) = \int_0^x t dt$ pour $x \geq 0$ (aire d'un triangle), puis vérifier que $F' = f$ et que la formule de la question 4 donne la bonne aire pour $\int_1^3 t dt$ (aire d'un trapèze).

Exercice D2 : Quatre intégrales par parties

Calculer, à l'aide d'une intégration par parties (on précisera u' , u , v , v') :

- a) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$;
- b) $\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$ (on écrira $x^3 e^{x^2} = x^2 \times x e^{x^2}$) ;
- c) $\int_0^1 \ln(1 + x) dx$ (on prendra pour u la primitive $x \mapsto x + 1$ de la fonction constante égale à 1) ;
- d) $\int_1^e (\ln x)^2 dx$.

Exercice D3 : Valeur moyenne et inégalité

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ et $\mu = \int_0^1 f(x) dx$ sa valeur moyenne.

1. Montrer que $\int_0^1 (f(x) - \mu)^2 dx = \int_0^1 f(x)^2 dx - \mu^2$. En déduire que $\mu^2 \leq \int_0^1 f(x)^2 dx$.
2. Appliquer ce résultat à $f(x) = e^x$ pour montrer que $(e - 1)^2 \leq \frac{e^2 - 1}{2}$. Vérifier numériquement l'inégalité.
3. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $h(a) = \int_0^1 (x^2 - a)^2 dx$. Montrer que $h(a) = a^2 - \frac{2}{3}a + \frac{1}{5}$. Pour quelle valeur de a le nombre $h(a)$ est-il minimal ? Quelle est cette valeur minimale ? Quel lien y a-t-il avec la valeur moyenne de $x \mapsto x^2$ sur $[0; 1]$?

Exercice D4 : Une suite d'intégrales et une approximation de e

Pour tout entier naturel n , on pose $w_n = \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$.

1. Calculer w_0 .
2. Montrer, par une intégration par parties, que pour tout $n \geq 1$, $w_n = n w_{n-1} - 1$. En déduire w_1 et w_2 .
3. Pour aller plus loin (la manipulation du symbole $\sum$ pour démontrer des égalités n'est pas un objectif du programme) : pour $n \geq 1$, montrer que $\frac{w_n}{n!} = \frac{w_{n-1}}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$, puis que

$$w_n = n! \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right).$$

4. Montrer que $0 \leq w_n \leq \frac{e}{n+1}$. En déduire que, pour $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$, on a $0 \leq e - S_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = e$.
5. On admet que $e < 3$. Montrer que S_7 approche e à 10^{-4} près. Que calcule le programme suivant et que doit-il afficher (à 10^{-6} près) ?

```
S = 1
f = 1
for k in range(1, 8):
    f = f*k
    S = S + 1/f
print(S)
```

Exercice D5 : Un domaine dont une borne tend vers 0

Soit $f(x) = x \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

1. Déterminer les limites de f en 0 (on pourra poser $X = \ln x$ ou utiliser $\sqrt{x}$) et en $+\infty$, puis dresser le tableau de variations de f .
2. Pour $a \in]0; 1]$, on note $A(a)$ l'aire du domaine délimité par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$. Justifier que $A(a) = - \int_a^1 x \ln x dx$, puis montrer que

$$A(a) = \frac{1}{4} + \frac{a^2}{2} \ln a - \frac{a^2}{4}.$$

3. Déterminer $\lim_{a \rightarrow 0^+} A(a)$. Interpréter ce résultat.
4. On considère le programme suivant.

```
from math import log

def A(a):
    return 1/4 + a**2/2*log(a) - a**2/4

a = 1
while 1/4 - A(a) >= 1e-4:
    a = a/2
print(a)
```

Montrer que A est décroissante sur $]0; 1]$. Calculer $\frac{1}{4} - A(\frac{1}{128})$ et $\frac{1}{4} - A(\frac{1}{256})$ (valeurs approchées), puis déterminer la valeur affichée par le programme et la signification du résultat.

Exercice D6 : Une équation avec une intégrale

On cherche toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x ,

$$\int_0^x f(t) dt = x f(x) - x^2. \quad (*)$$

On suppose que f vérifie $(*)$ et on note $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

1. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F' = f$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (on exprimera $f(x)$ à l'aide de $F(x)$ pour $x \neq 0$).
3. En dérivant $(*)$ sur $\mathbb{R}^*$, montrer que $f'(x) = 2$ pour tout $x \neq 0$.
4. En déduire qu'il existe un réel c tel que $f(x) = 2x + c$ pour tout réel x (on traitera séparément $x > 0$ et $x < 0$, puis on utilisera la continuité de f en 0).
5. Réciproquement, vérifier que toute fonction $x \mapsto 2x + c$ vérifie $(*)$.
6. Déterminer parmi ces fonctions celle qui vérifie de plus $\int_0^1 f(t) dt = 4$.

Exercice D7 : Série harmonique et logarithme

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. On rappelle que $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ pour $x > 0$.

1. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$.
2. En sommant ces inégalités, montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$.
3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln n}$.
4. Soit N le plus petit entier tel que $H_N \geq 5$. Montrer que $55 \leq N \leq 148$. Le programme ci-dessous affiche N ; quelle valeur obtient-on, et est-ce compatible avec l'encadrement précédent ?

```
n = 1
S = 1
while S < 5:
    n = n + 1
    S = S + 1/n
print(n)
```

Exercice D8 : Démonstration : l'intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a; b]$, de dérivées u' et v' continues.

1. Justifier que uv est dérivable sur $[a; b]$, donner $(uv)'$ et justifier que $(uv)'$, $u'v$ et uv' sont continues sur $[a; b]$.
2. En déduire que $\int_a^b u'(x)v(x) dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$.
3. Application : calculer $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$ en précisant les fonctions u et v choisies.
4. Soit f dérivable sur $[a; b]$ de dérivée continue. En appliquant la formule avec $u = v = f$, montrer que $\int_a^b f(x)f'(x) dx = \frac{f(b)^2 - f(a)^2}{2}$. Retrouver ce résultat avec une primitive de $f f'$.

Exercice D9 : Approximation d'une aire par des suites adjacentes

Pour tout entier $n \geq 1$, on partage $[0; 1]$ en n intervalles de même largeur $\frac{1}{n}$ et on note, pour $f(x) = x^2$,

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{et} \quad T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

On rappelle que $1^2 + 2^2 + \dots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$ pour tout entier $m \geq 1$.

1. Montrer que $S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$ et $T_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$.
2. Justifier que $S_n \leq \int_0^1 x^2 dx \leq T_n$ (on interprétera S_n et T_n comme des sommes d'aires de rectangles).
3. Montrer que (S_n) est strictement croissante, que (T_n) est strictement décroissante et que $T_n - S_n \rightarrow 0$. Que peut-on dire des suites (S_n) et (T_n) ?
4. En déduire la valeur de $\int_0^1 x^2 dx$ sans primitive, puis la retrouver avec une primitive.
5. On souhaite calculer S_n et T_n avec Python. Compléter la ligne manquante, puis donner les valeurs renvoyées par `sommes(10)`.

```
def sommes(n):  
    s = 0  
    t = 0  
    for k in range(n):  
        s = s + (k/n)**2 / n  
        t = t + .....  
    return s, t
```