

Corrigé : Calcul intégral**Fiche Défi****D1.**

- Par la relation de Chasles, $F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt$: c'est l'aire du domaine sous la courbe entre les abscisses x et $x+h$. Comme f est croissante, pour $t \in [x; x+h]$ on a $f(x) \leq f(t) \leq f(x+h)$. Le domaine contient le rectangle de largeur h et de hauteur $f(x)$ et il est contenu dans le rectangle de largeur h et de hauteur $f(x+h)$. D'où $h f(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq h f(x+h)$.
- On divise par $h > 0$: $f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$. Comme f est continue en x , $f(x+h) \rightarrow f(x)$ quand $h \rightarrow 0^+$. Par le théorème des gendarmes, $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$: F est dérivable à droite en x et $F'_d(x) = f(x)$.
- $F(x) - F(x-h)$ est l'aire sous la courbe entre $x-h$ et x . Pour $t \in [x-h; x]$, $f(x-h) \leq f(t) \leq f(x)$, donc $h f(x-h) \leq F(x) - F(x-h) \leq h f(x)$. En divisant par h : $f(x-h) \leq \frac{F(x) - F(x-h)}{h} \leq f(x)$. Quand $h \rightarrow 0^+$, $f(x-h) \rightarrow f(x)$ par continuité, donc le taux de variation à gauche tend vers $f(x)$: $F'_g(x) = f(x)$. En tout point intérieur, les dérivées à droite et à gauche existent et valent $f(x)$; aux bornes, la seule dérivée possible vaut aussi $f(a)$ ou $f(b)$. Donc F est dérivable sur $[a; b]$ et $F' = f$.
- F et G sont deux primitives de f : $(G - F)' = 0$ sur l'intervalle $[a; b]$, donc $G - F$ est constante, égale à un réel C . Comme $F(a) = \int_a^a f = 0$, on obtient $G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$.
- La fonction $t \mapsto t$ est continue, positive et croissante sur $[0; +\infty[$. Le domaine sous la courbe entre 0 et x est un triangle rectangle de côtés x et x : $F(x) = \frac{x^2}{2}$, et $F'(x) = x = f(x)$. Pour $\int_1^3 t dt$, le domaine est un trapèze de bases 1 et 3 et de hauteur 2 : aire $\frac{1+3}{2} \times 2 = 4$. La formule donne $\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$: les deux résultats coïncident.

Conclusion : $F' = f$ et $\int_a^b f = G(b) - G(a)$ pour toute primitive G de f .

D2.

- a) $u'(x) = \frac{1}{x^2}$, $u(x) = -\frac{1}{x}$; $v(x) = \ln x$, $v'(x) = \frac{1}{x}$ (classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; 2]$).

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln 2}{2} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1 - \ln 2}{2}.$$

- b) $u'(x) = x e^{x^2}$, $u(x) = \frac{1}{2} e^{x^2}$; $v(x) = x^2$, $v'(x) = 2x$.

$$\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx = \left[\frac{x^2}{2} e^{x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{e}{2} - \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{e}{2} - \frac{e-1}{2} = \frac{1}{2}.$$

- c) $u'(x) = 1$, $u(x) = x + 1$; $v(x) = \ln(1+x)$, $v'(x) = \frac{1}{1+x}$ (classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$).

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx = \left[(x+1) \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x+1}{1+x} dx = 2 \ln 2 - \int_0^1 1 dx = 2 \ln 2 - 1.$$

- d) $u'(x) = 1$, $u(x) = x$; $v(x) = (\ln x)^2$, $v'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$.

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = \left[x (\ln x)^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx = e - 2 \left[x \ln x - x \right]_1^e = e - 2(0 - (-1)) = e - 2.$$

Ici $\int_1^e \ln x \, dx$ est obtenue par une seconde IPP ($u' = 1$, $v = \ln x$), ou en vérifiant que $x \ln x - x$ a pour dérivée $\ln x$.

Conclusion : $\frac{1 - \ln 2}{2} \approx 0,153$; $\frac{1}{2}$; $2 \ln 2 - 1 \approx 0,386$; $e - 2 \approx 0,718$.

D3.

1. On développe $(f - \mu)^2 = f^2 - 2\mu f + \mu^2$ et on intègre par linéarité :

$$\int_0^1 (f - \mu)^2 = \int_0^1 f^2 - 2\mu \int_0^1 f + \mu^2 \int_0^1 1 = \int_0^1 f^2 - 2\mu^2 + \mu^2 = \int_0^1 f^2 - \mu^2.$$

Comme $(f - \mu)^2 \geq 0$ et $0 \leq 1$, par positivité $\int_0^1 (f - \mu)^2 \geq 0$, donc $\mu^2 \leq \int_0^1 f^2$.

2. Pour $f(x) = e^x$: $\mu = \int_0^1 e^x \, dx = e - 1$ et $\int_0^1 e^{2x} \, dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 = \frac{e^2 - 1}{2}$. Donc $(e - 1)^2 \leq \frac{e^2 - 1}{2}$. Numériquement, $2,95 \leq 3,19$.

3. $h(a) = \int_0^1 (x^4 - 2ax^2 + a^2) \, dx = \frac{1}{5} - \frac{2a}{3} + a^2$. C'est un trinôme du second degré, de coefficient dominant $1 > 0$: il est minimal en $a = \frac{2/3}{2} = \frac{1}{3}$, et $h(\frac{1}{3}) = \frac{1}{9} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{45}$. Or la valeur moyenne de $x \mapsto x^2$ sur $[0; 1]$ est $\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$: le minimum est atteint quand a est la valeur moyenne, et il vaut $\int_0^1 x^4 \, dx - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}$, ce qui est cohérent avec la question 1.

Conclusion : $\mu^2 \leq \int_0^1 f^2$; $(e - 1)^2 \leq \frac{e^2 - 1}{2}$; h minimale pour $a = \frac{1}{3}$, avec $h(\frac{1}{3}) = \frac{4}{45}$.

D4.

1. $w_0 = \int_0^1 e^x \, dx = e - 1$.
2. Pour $n \geq 1$, on pose $u'(x) = e^x$, $u(x) = e^x$; $v(x) = (1 - x)^n$, $v'(x) = -n(1 - x)^{n-1}$ (classe $\mathcal{C}^1$).

$$w_n = \left[(1 - x)^n e^x \right]_0^1 + n \int_0^1 (1 - x)^{n-1} e^x \, dx = (0 - 1) + n w_{n-1} = n w_{n-1} - 1.$$

Donc $w_1 = w_0 - 1 = e - 2$ et $w_2 = 2w_1 - 1 = 2e - 5$.

3. On divise la relation par $n! = n \times (n - 1)!$: $\frac{w_n}{n!} = \frac{w_{n-1}}{(n - 1)!} - \frac{1}{n!}$. En sommant ces égalités pour k de 1 à n (les termes se télescopent) :

$$\frac{w_n}{n!} = \frac{w_0}{0!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = e - 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

D'où $w_n = n! \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$. Vérification : $w_2 = 2(e - 1 - 1 - \frac{1}{2}) = 2e - 5$.

4. Pour $x \in [0; 1]$, $0 \leq (1 - x)^n e^x \leq e(1 - x)^n$ car $e^x \leq e$. Par intégration, $0 \leq w_n \leq e \int_0^1 (1 - x)^n \, dx = e \left[-\frac{(1 - x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{e}{n+1}$. Comme $e - S_n = \frac{w_n}{n!}$, on a $0 \leq e - S_n \leq \frac{e}{(n+1)n!} = \frac{e}{(n+1)!}$. Ce majorant tend vers 0, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = e$.

5. Pour $n = 7$: $e - S_7 \leq \frac{e}{8!} < \frac{3}{40320} \approx 7,4 \times 10^{-5} < 10^{-4}$. Le programme calcule $S_7 = \sum_{k=0}^7 \frac{1}{k!}$ (la variable **f** contient successivement $k!$). Il affiche $S_7 = \frac{685}{252} \approx 2,718254$.

Conclusion : $w_n = n w_{n-1} - 1$, $w_n = n!(e - S_n)$; $S_n \rightarrow e$ avec $0 \leq e - S_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$; $S_7 \approx 2,718254$.

D5.

1. En 0 : avec $X = \ln x$, $x \ln x = X e^X \rightarrow 0$ quand $X \rightarrow -\infty$ (croissances comparées), donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. En $+\infty$: $x \rightarrow +\infty$ et $\ln x \rightarrow +\infty$, donc $\lim f = +\infty$. De plus $f'(x) = \ln x + 1$, qui est négative sur $]0; e^{-1}]$ et positive sur $[e^{-1}; +\infty[$.

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f	0	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$

2. Sur $]0; 1]$, $\ln x \leq 0$ donc $f \leq 0$: la courbe est sous l'axe et l'aire vaut $A(a) = -\int_a^1 x \ln x \, dx$. IPP avec $u'(x) = x$, $u(x) = \frac{x^2}{2}$; $v(x) = \ln x$, $v'(x) = \frac{1}{x}$:

$$\int_a^1 x \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x}{2} \, dx = -\frac{a^2}{2} \ln a - \left[\frac{x^2}{4} \right]_a^1 = -\frac{a^2}{2} \ln a - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}.$$

Donc $A(a) = \frac{1}{4} + \frac{a^2}{2} \ln a - \frac{a^2}{4}$.

3. Par croissances comparées, $a^2 \ln a \rightarrow 0$ quand $a \rightarrow 0^+$, et $a^2 \rightarrow 0$. Donc $\lim_{a \rightarrow 0^+} A(a) = \frac{1}{4}$: l'aire du domaine délimité par la courbe, l'axe des abscisses et la droite $x = 1$ (domaine dont la borne gauche est $x = 0$) est finie et vaut $\frac{1}{4}$ u.a. Cette limite peut aussi se lire comme $\int_0^1 (-x \ln x) \, dx = \frac{1}{4}$.
4. $A'(a) = a \ln a + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = a \ln a \leq 0$ sur $]0; 1]$: A est décroissante. Posons $d(a) = \frac{1}{4} - A(a) = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \ln a$; d est croissante. On calcule $d(\frac{1}{128}) \approx 1,63 \times 10^{-4} \geq 10^{-4}$ et $d(\frac{1}{256}) \approx 4,6 \times 10^{-5} < 10^{-4}$. Le programme divise a par 2 tant que $d(a) \geq 10^{-4}$. Comme d est croissante, $d \geq d(\frac{1}{128}) \geq 10^{-4}$ pour $a = 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{128}$, et la boucle s'arrête pour $a = \frac{1}{256} = 0,00390625$: c'est ce que le programme affiche. Interprétation : pour $a = \frac{1}{256}$, l'aire manquante entre $x = 0$ et $x = a$ est inférieure à 10^{-4} ; $A(a)$ approche $\frac{1}{4}$ à 10^{-4} près.

Conclusion : $\lim_{0^+} f = 0$, minimum $-\frac{1}{e}$ en e^{-1} ; $A(a) = \frac{1}{4} + \frac{a^2}{2} \ln a - \frac{a^2}{4} \rightarrow \frac{1}{4}$; le programme affiche $\frac{1}{256}$.

D6.

1. f est continue sur $\mathbb{R}$, donc F est la primitive de f qui s'annule en 0 : elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$.
2. D'après (*), $F(x) = x f(x) - x^2$, donc pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{F(x) + x^2}{x}$. Cette expression est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (quotient de fonctions dérivables, dénominateur non nul) : f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
3. On dérive (*) sur $\mathbb{R}^*$: $F'(x) = f(x) + x f'(x) - 2x$. Avec $F' = f$: $f(x) = f(x) + x f'(x) - 2x$, soit $x f'(x) = 2x$, donc $f'(x) = 2$ pour tout $x \neq 0$.
4. Sur l'intervalle $]0; +\infty[$, $f' = 2$ donc $f(x) = 2x + c_1$; sur $] -\infty; 0[$, $f(x) = 2x + c_2$. Par continuité de f en 0 : $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + c_1) = c_1$ et $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x + c_2) = c_2$. Donc $c_1 = c_2 = f(0) =: c$ et $f(x) = 2x + c$ pour tout réel x .

5. Si $f(t) = 2t + c$, alors $\int_0^x f(t) dt = \left[t^2 + ct \right]_0^x = x^2 + cx$ et $x f(x) - x^2 = 2x^2 + cx - x^2 = x^2 + cx$:
 (*) est vérifiée pour tout x .
6. $\int_0^1 (2t + c) dt = 1 + c = 4$ donne $c = 3$: $f(x) = 2x + 3$.

Conclusion : les solutions sont les fonctions $x \mapsto 2x + c$ ($c \in \mathbb{R}$) ; avec $\int_0^1 f = 4$, $f(x) = 2x + 3$.

D7.

1. Sur $[k; k+1]$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante : $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$. On intègre sur un intervalle de longueur 1 : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$.
2. Minorant : en sommant $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$ pour $k = 1, \dots, n$ et par Chasles, $\int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt = \ln(n+1) \leq H_n$.
 Majorant : en sommant $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt$ pour $k = 1, \dots, n-1$, on obtient $H_n - 1 = \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt = \ln n$, soit $H_n \leq 1 + \ln n$ (pour $n = 1$, $H_1 = 1 = 1 + \ln 1$).
3. Comme $\ln(n+1) \rightarrow +\infty$, par comparaison $H_n \rightarrow +\infty$. Pour $n \geq 2$, en divisant par $\ln n > 0$:
 $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + 1$. Or $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} \rightarrow 1$ et $\frac{1}{\ln n} + 1 \rightarrow 1$. Par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1$.
4. Si $n \leq 54$, $H_n \leq 1 + \ln n \leq 1 + \ln 54 \approx 4,99 < 5$: donc $N \geq 55$. Pour $n = 148$, $H_{148} \geq \ln 149 \approx 5,004 \geq 5$: donc $N \leq 148$. Le programme affiche $N = 83$; en effet $H_{82} \approx 4,990 < 5 \leq H_{83} \approx 5,002$. On a bien $55 \leq 83 \leq 148$: c'est compatible. L'encadrement est large, mais il donne le bon ordre de grandeur.

Conclusion : $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$; $H_n \rightarrow +\infty$ et $\frac{H_n}{\ln n} \rightarrow 1$; $N = 83$.

D8.

1. Comme produit de deux fonctions dérivables, uv est dérivable sur $[a; b]$ et $(uv)' = u'v + uv'$. Les fonctions u et v sont continues (car dérivables) et u' , v' sont continues par hypothèse : les produits $u'v$ et uv' sont continus, donc aussi leur somme $(uv)'$.
2. $(uv)'$ est continue, et uv en est une primitive sur $[a; b]$. Donc $\int_a^b (uv)'(x) dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) = [uv]_a^b$. Par linéarité, $\int_a^b (uv)' = \int_a^b u'v + \int_a^b uv'$. D'où
- $$\int_a^b u'(x)v(x) dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx.$$
3. On pose $v(x) = x$ ($v'(x) = 1$) et $u'(x) = \cos x$ ($u(x) = \sin x$). Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x dx = \left[x \sin x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - \left[-\cos x \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Conclusion : $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx = \frac{\pi}{2} - 1$.

4. Avec $u = v = f$: $\int_a^b f'f = [f^2]_a^b - \int_a^b f f'$, donc $2 \int_a^b f f' = f(b)^2 - f(a)^2$. Autre méthode : $f f'$ a

pour primitive $\frac{f^2}{2}$ (forme $u'u$), donc l'intégrale vaut $\frac{f(b)^2}{2} - \frac{f(a)^2}{2}$.

Conclusion : $\int_a^b f(x)f'(x) dx = \frac{f(b)^2 - f(a)^2}{2}$.

D9.

1. $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$. De même $T_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$.

2. La fonction f est positive et croissante sur $[0; 1]$. Sur chaque intervalle $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$, le rectangle de hauteur $f\left(\frac{k}{n}\right)$ est sous la courbe et le rectangle de hauteur $f\left(\frac{k+1}{n}\right)$ la contient. En sommant, S_n (rectangles « à gauche ») est inférieure à l'aire sous la courbe et T_n (rectangles « à droite ») lui est supérieure.

Conclusion : $S_n \leq \int_0^1 x^2 dx \leq T_n$.

3. $T_n - S_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Par ailleurs

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{6(n+1)^2} - \frac{1}{6n^2} = \frac{3n(n+1) - (2n+1)}{6n^2(n+1)^2} = \frac{3n^2 + n - 1}{6n^2(n+1)^2} > 0,$$

$$T_{n+1} - T_n = \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6(n+1)^2} - \frac{1}{6n^2} = -\frac{3n(n+1) + (2n+1)}{6n^2(n+1)^2} < 0.$$

Conclusion : (S_n) est strictement croissante, (T_n) strictement décroissante et $T_n - S_n \rightarrow 0$: les suites sont adjacentes ; elles convergent vers une même limite.

4. Les deux suites ont pour limite $\frac{1}{3}$ (somme de $\frac{1}{3}$ et de termes de limite nulle). Comme $S_n \leq$

$\int_0^1 x^2 dx \leq T_n$ pour tout n , le passage à la limite donne $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. Avec une primitive :

$$\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Conclusion : $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ par les deux méthodes.

5. La ligne manquante est $((k+1)/n) \times 2 / n$ (à gauche, k varie de 0 à $n-1$; à droite, il faut $f\left(\frac{k+1}{n}\right) \times \frac{1}{n}$).

Pour $n = 10$: $S_{10} = \frac{9 \times 19}{600} = 0,285$ et $T_{10} = \frac{11 \times 21}{600} = 0,385$.

Conclusion : `sommes(10)` renvoie (0,285 ; 0,385) (à l'arrondi flottant près), qui encadre bien $\frac{1}{3} \approx 0,3333$.