

Calcul intégral

Fiche Bases

Nom : _____

Date : _____

Exercice B1 : Primitives et crochet

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_1^3 (2x + 1) dx;$

b) $\int_0^1 e^{2x} dx;$

c) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx;$

d) $\int_0^\pi \sin x dx;$

e) $\int_0^1 2x e^{x^2} dx;$

f) $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx.$

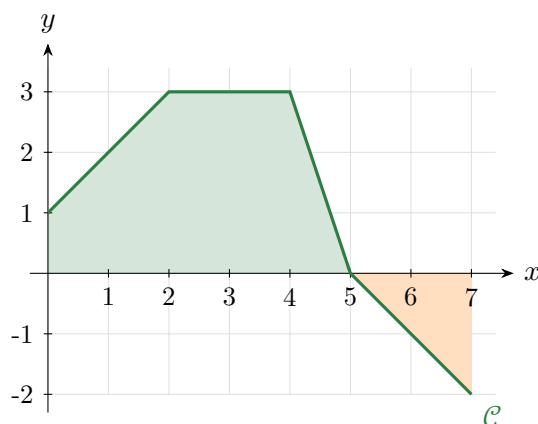
Exercice B2 : Linéarité et relation de Chasles

 Soit f et g deux fonctions continues sur $[0; 5]$ telles que

$$\int_0^2 f(x) dx = 3, \quad \int_2^5 f(x) dx = -1, \quad \int_0^2 g(x) dx = 4, \quad \int_2^5 g(x) dx = 6.$$

1. Calculer $\int_0^5 f(x) dx$ puis $\int_5^2 f(x) dx$.
2. Calculer $\int_0^2 (2f(x) - 3g(x)) dx$ et $\int_0^5 (f(x) + g(x)) dx$.
3. A-t-on $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [0; 2]$? Justifier.

Exercice B3 : Lecture graphique

 On donne la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f affine par morceaux, définie sur $[0; 7]$. Elle est formée de segments joignant les points de coordonnées $(0; 1)$, $(2; 3)$, $(4; 3)$, $(5; 0)$ et $(7; -2)$.


1. Déterminer $\int_0^4 f(x) dx$ (aires de trapèzes et de rectangles).
2. Déterminer $\int_4^7 f(x) dx$, puis $\int_0^7 f(x) dx$.

3. Quelle est l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 7$?
4. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0; 4]$.

Exercice B4 : Aire sous une courbe

1. Soit $f(x) = x^2 + 1$ sur $[0; 3]$. Justifier que f est positive, puis calculer l'aire du domaine compris entre sa courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$. On exprimera le résultat en unités d'aire, puis en cm^2 , sachant que l'unité de longueur est 2 cm sur l'axe des abscisses et 1,5 cm sur l'axe des ordonnées.
2. Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe de $x \mapsto e^x$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 3$.

Exercice B5 : Signe de la fonction et position relative

1. Soit $f(x) = x^2 - 1$ sur $[0; 2]$. Étudier le signe de f sur $[0; 2]$, puis calculer l'aire du domaine compris entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.
2. Soit $g(x) = x + 2$ et $h(x) = x^2$. Déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes de g et h , préciser laquelle est au-dessus de l'autre entre ces points, puis calculer l'aire du domaine qu'elles délimitent.

Exercice B6 : Vrai ou faux

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant (preuve ou contre-exemple). Les fonctions sont continues sur $[a; b]$ avec $a < b$.

1. Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a; b]$, alors $\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$.
2. $\int_a^b f(x)g(x) \, dx = \left(\int_a^b f(x) \, dx \right) \left(\int_a^b g(x) \, dx \right)$.
3. Si $\int_a^b f(x) \, dx = 0$, alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a; b]$.
4. Si $\int_0^3 f(x) \, dx = -2$, alors f prend au moins une valeur strictement négative sur $[0; 3]$.

Exercice B7 : Valeur moyenne

1. Calculer la valeur moyenne de la fonction exponentielle sur $[0; \ln 3]$. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
2. La température (en $^{\circ}\text{C}$) dans une serre, t heures après minuit, est modélisée sur $[0; 12]$ par $T(t) = -0,5t^2 + 6t + 10$.
 - a) Calculer la température moyenne entre 0 h et 12 h.
 - b) Vérifier que $T(0) = T(12) = 10$ et que le maximum de T sur $[0; 12]$ est atteint en $t = 6$. La valeur trouvée est-elle compatible avec ces extrema ?

Exercice B8 : Première intégration par parties

Calculer à l'aide d'une intégration par parties (on précisera u' , u , v , v') :

- a) $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$;
- b) $\int_1^e x \ln x \, dx$.

Exercice B9 : Fonction définie par une intégrale

Pour tout réel x , on pose $F(x) = \int_0^x (t-1)e^{-t} dt$.

1. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner $F'(x)$.
2. Étudier le signe de $F'(x)$ et dresser le tableau de variations de F (sans les limites).
3. Montrer que $G(t) = -te^{-t}$ est une primitive de $t \mapsto (t-1)e^{-t}$. En déduire l'expression de $F(x)$, puis la valeur du minimum de F .

Exercice B10 : Méthode des rectangles

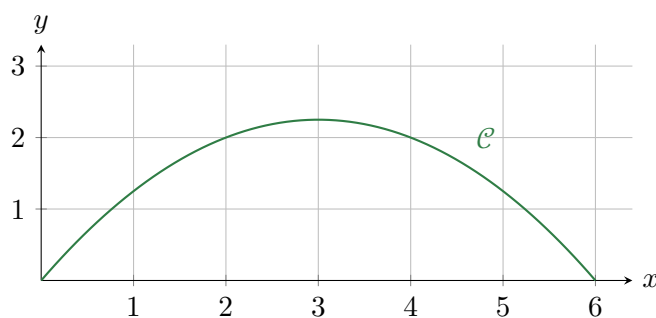
On considère la fonction Python suivante.

```
def rectangles(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + f(a + k*h)
    return h*s
```

1. Que renvoie `rectangles(f, a, b, n)`? Que modifier pour obtenir la somme des rectangles à droite?
2. Soit $f(x) = x^2$ sur $[0; 1]$ et $n = 4$. Calculer à la main les deux sommes S_g et S_d , puis en déduire un encadrement de $\int_0^1 x^2 dx$ (on justifiera que f est croissante).
3. Montrer que $S_d - S_g = \frac{1}{n}$ pour tout n . Quelle valeur minimale de n garantit un encadrement d'amplitude au plus 0,01?

Exercice B11 : Estimer graphiquement une intégrale

On a tracé la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f définie sur $[0; 6]$ par $f(x) = \frac{x(6-x)}{4}$. Un carreau du quadrillage représente une unité d'aire.



On note $I = \int_0^6 f(x) dx$.

1. Justifier que I est l'aire d'un domaine que l'on précisera.
2. Compter les carreaux entièrement situés sous la courbe, puis les carreaux qui contiennent au moins un point du domaine. En déduire un encadrement de I par deux entiers, puis un encadrement de la valeur moyenne μ de f sur $[0; 6]$.
3. Calculer I et μ à l'aide d'une primitive. Les résultats sont-ils compatibles avec les encadrements de la question 2?