

Corrigé : Calcul intégral**Fiche Bases**

B1. On écrit chaque fois une primitive, puis $\left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$.

a) Primitive $x^2 + x$: $\left[x^2 + x\right]_1^3 = (9 + 3) - (1 + 1) = 10$.

b) Primitive $\frac{e^{2x}}{2}$: $\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{e^2 - 1}{2}$.

c) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ a pour primitive $2\sqrt{x}$: $\left[2\sqrt{x}\right]_1^4 = 2 \times 2 - 2 \times 1 = 2$.

d) Primitive $-\cos x$: $\left[-\cos x\right]_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$.

e) $2xe^{x^2}$ est de la forme $u'e^u$ avec $u(x) = x^2$, de primitive e^{x^2} : $\left[e^{x^2}\right]_0^1 = e - 1$.

f) $\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2 + 1}$ est de la forme $\frac{1}{2} \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$, de primitive $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$:
 $\left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)\right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$.

Conclusion : 10 ; $\frac{e^2 - 1}{2}$; 2 ; 2 ; $e - 1$; $\frac{\ln 2}{2}$.

B2.

1. Chasles : $\int_0^5 f = \int_0^2 f + \int_2^5 f = 3 + (-1) = 2$. En échangeant les bornes, $\int_5^2 f = -\int_2^5 f = 1$.

2. Linéarité : $\int_0^2 (2f - 3g) = 2 \times 3 - 3 \times 4 = -6$. Par Chasles, $\int_0^5 g = 4 + 6 = 10$, donc $\int_0^5 (f + g) = 2 + 10 = 12$.

3. Non. Si $f \geq g$ sur $[0; 2]$, alors $f - g \geq 0$ et, par positivité de l'intégrale, $\int_0^2 (f - g) \geq 0$. Or
 $\int_0^2 (f - g) = 3 - 4 = -1 < 0$.

Conclusion : 2 et 1 ; -6 et 12 ; non.

B3. Sur chaque morceau, l'intégrale est l'aire algébrique d'un trapèze ou d'un triangle.

1. Sur $[0; 2]$: trapèze de bases 1 et 3 , de hauteur 2 , d'aire $\frac{1+3}{2} \times 2 = 4$. Sur $[2; 4]$: rectangle $2 \times 3 = 6$.

Donc $\int_0^4 f = 4 + 6 = 10$.

2. Sur $[4; 5]$: triangle de base 1 et de hauteur 3 , d'aire $\frac{1 \times 3}{2} = \frac{3}{2}$. Sur $[5; 7]$, $f \leq 0$: triangle de base 2 et de hauteur 2 , d'aire 2 , donc une intégrale égale à -2 . Ainsi $\int_4^7 f = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$ et
 $\int_0^7 f = 10 - \frac{1}{2} = \frac{19}{2}$.

3. Il faut compter positivement la partie sous l'axe : $A = 10 + \frac{3}{2} + 2 = \frac{27}{2}$ u.a.

4. $\mu = \frac{1}{4-0} \int_0^4 f = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$.

Conclusion : 10 ; $-\frac{1}{2}$ et $\frac{19}{2}$; $A = 13,5$ u.a. (différente de $\int_0^7 f = 9,5$ car f change de signe) ; $\mu = 2,5$.

B4.

1. Pour tout réel x , $x^2 + 1 \geq 1 > 0$: f est continue et positive. L'aire vaut

$$A = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^3 = 9 + 3 = 12 \text{ u.a.}$$

Une unité d'aire est celle d'un rectangle de côtés 2 cm et 1,5 cm, soit 3 cm². Donc $A = 12 \times 3 = 36$ cm².

2. La fonction exponentielle est continue et positive. L'aire vaut $\int_0^{\ln 3} e^x dx = \left[e^x \right]_0^{\ln 3} = e^{\ln 3} - e^0 = 3 - 1 = 2 \text{ u.a.}$

Conclusion : 12 u.a. = 36 cm² ; 2 u.a.

B5.

1. $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$: $f \leq 0$ sur $[0 ; 1]$ et $f \geq 0$ sur $[1 ; 2]$. Une primitive de f est $\frac{x^3}{3} - x$.

$$\int_0^1 f = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_0^1 = -\frac{2}{3}, \quad \int_1^2 f = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{4}{3}.$$

L'aire est $A = \left| -\frac{2}{3} \right| + \frac{4}{3} = 2 \text{ u.a.}$ (et non $\int_0^2 f = \frac{2}{3}$).

2. $g(x) = h(x) \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff (x + 1)(x - 2) = 0$, soit $x = -1$ ou $x = 2$. Comme $g(x) - h(x) = -(x + 1)(x - 2) \geq 0$ sur $[-1 ; 2]$, la droite est au-dessus de la parabole. Alors

$$A = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \left(2 + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{9}{2}.$$

Conclusion : 2 u.a. ; abscisses -1 et 2 , aire $\frac{9}{2}$ u.a.

B6.

1. **Vrai.** $g - f \geq 0$ sur $[a ; b]$ avec $a < b$, donc $\int_a^b (g - f) \geq 0$ et, par linéarité, $\int_a^b g \geq \int_a^b f$.
2. **Faux.** Contre-exemple : $f = g = 1$ sur $[0 ; 2]$. Alors $\int_0^2 fg = 2$ alors que $\left(\int_0^2 f \right) \left(\int_0^2 g \right) = 2 \times 2 = 4$.
3. **Faux.** Contre-exemple : $f(x) = x$ sur $[-1 ; 1]$: $\int_{-1}^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = 0$, mais f n'est pas nulle. (La réciproque est vraie si f est de plus positive.)
4. **Vrai.** Si $f \geq 0$ sur $[0 ; 3]$, alors $\int_0^3 f \geq 0$, ce qui contredit -2 . Donc il existe $x \in [0 ; 3]$ avec $f(x) < 0$.

B7.

1. $\mu = \frac{1}{\ln 3 - 0} \int_0^{\ln 3} e^x dx = \frac{e^{\ln 3} - 1}{\ln 3} = \frac{2}{\ln 3} \approx 1,82$.
2. a) $\int_0^{12} T(t) dt = \left[-\frac{t^3}{6} + 3t^2 + 10t \right]_0^{12} = -288 + 432 + 120 = 264$. La température moyenne est $\frac{264}{12} = 22$ °C.
- b) $T(0) = 10$ et $T(12) = -72 + 72 + 10 = 10$. $T'(t) = -t + 6$ s'annule en $t = 6$ avec $T' > 0$ avant et $T' < 0$ après : le maximum est $T(6) = -18 + 36 + 10 = 28$. Le minimum sur $[0 ; 12]$ est 10. Comme $10 \leq 22 \leq 28$, la valeur moyenne est bien comprise entre le minimum et le maximum.

Conclusion : $\mu = \frac{2}{\ln 3} \approx 1,82$; température moyenne 22 °C.

B8.

- a) On pose $u'(x) = \sin x$, $u(x) = -\cos x$; $v(x) = x$, $v'(x) = 1$. Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi]$.

$$\int_0^\pi x \sin x \, dx = \left[-x \cos x \right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x \, dx = \pi + \left[\sin x \right]_0^\pi = \pi.$$

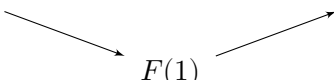
- b) On pose $u'(x) = x$, $u(x) = \frac{x^2}{2}$; $v(x) = \ln x$, $v'(x) = \frac{1}{x}$ (de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; e]$).

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Conclusion : π et $\frac{e^2 + 1}{4}$.

B9.

- La fonction $t \mapsto (t-1)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc F est la primitive de cette fonction qui s'annule en 0 : elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = (x-1)e^{-x}$.
- Comme $e^{-x} > 0$, $F'(x)$ a le signe de $x-1$: $F' < 0$ sur $] -\infty; 1[$, $F'(1) = 0$, $F' > 0$ sur $]1; +\infty[$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$F'(x)$	-	0	+
F			

- $G'(t) = -e^{-t} + t e^{-t} = (t-1)e^{-t}$: G est bien une primitive. Donc

$$F(x) = \left[-t e^{-t} \right]_0^x = -x e^{-x}.$$

Le minimum de F est $F(1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e} \approx -0,37$.

Conclusion : $F(x) = -x e^{-x}$, minimum $-\frac{1}{e}$ atteint en $x = 1$.

B10.

- La fonction renvoie la somme des rectangles à gauche : $S_g = h[f(a) + f(a+h) + \dots + f(b-h)]$. Pour la somme à droite, on remplace $f(a + k \cdot h)$ par $f(a + (k+1) \cdot h)$.
- Ici $h = \frac{1}{4}$. La fonction carré est croissante sur $[0; 1]$, donc $S_g \leq \int_0^1 x^2 \, dx \leq S_d$.

$$S_g = \frac{1}{4} \left(0 + \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16} \right) = \frac{14}{64} = \frac{7}{32}, \quad S_d = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16} + \frac{16}{16} \right) = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}.$$

D'où $\frac{7}{32} \leq \int_0^1 x^2 \, dx \leq \frac{15}{32}$ (soit $0,21875 \leq \cdot \leq 0,46875$).

- Les deux sommes ont $n-1$ termes en commun : $S_d - S_g = h[f(b) - f(a)] = \frac{1}{n} \times (1 - 0) = \frac{1}{n}$. On veut $\frac{1}{n} \leq 0,01$, soit $n \geq 100$.

Conclusion : $n = 100$ convient (c'est la plus petite valeur, car $\frac{1}{99} > 0,01$). On obtient alors $0,32835 \leq \int_0^1 x^2 \, dx \leq 0,33835$.

B11.

- La fonction f est continue sur $[0; 6]$ et positive (produit de $x \geq 0$ et de $6-x \geq 0$ divisé par 4). Donc I est l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 6$.

2. Colonne par colonne (largeur 1), on lit le plus petit et le plus grand des carreaux couverts :

Colonne	$[0; 1]$	$[1; 2]$	$[2; 3]$	$[3; 4]$	$[4; 5]$	$[5; 6]$
Carreaux entièrement sous $\mathcal{C}$	0	1	2	2	1	0
Carreaux rencontrés par le domaine	2	2	3	3	2	2

On compte $0 + 1 + 2 + 2 + 1 + 0 = 6$ carreaux entièrement sous la courbe et $2 + 2 + 3 + 3 + 2 + 2 = 14$ carreaux rencontrés. Donc $6 \leq I \leq 14$. La valeur moyenne est $\mu = \frac{I}{6-0}$, donc $1 \leq \mu \leq \frac{14}{6} \approx 2,33$.

Conclusion : $6 \leq I \leq 14$ et $1 \leq \mu \leq \frac{7}{3}$.

3. $f(x) = \frac{6x - x^2}{4}$ a pour primitive $F(x) = \frac{1}{4} \left(3x^2 - \frac{x^3}{3} \right)$. Alors $I = F(6) - F(0) = \frac{1}{4} (108 - 72) = 9$

et $\mu = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$.

Conclusion : $I = 9$ u.a. et $\mu = \frac{3}{2}$, compatibles avec $6 \leq I \leq 14$ et $1 \leq \mu \leq \frac{7}{3}$ (le maximum de f est $f(3) = \frac{9}{4}$, et μ est bien comprise entre 0 et $\frac{9}{4}$).