

Fiche 4 : suites d'intégrales, rectangles et inégalités

Sept exercices sur les grands classiques de fin de chapitre :

- deux suites d'intégrales (récurrence, monotonie, encadrement, limite) ;
- la suite de Wallis avec une intégration par parties ;
- la méthode des rectangles avec Python ;
- l'étude d'une fonction définie par une intégrale non calculable ;
- les inégalités obtenues en intégrant ;
- une valeur moyenne en modélisation.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- relation de récurrence démontrée ;
- monotonie justifiée par la croissance de l'intégrale ;
- encadrement ;
- théorème des gendarmes cité ;
- conclusion.

Le plan d'une suite d'intégrales

1. **Premiers termes** : calcule I_0 et I_1 directement.
2. **Relation de récurrence** : par intégration par parties, ou en additionnant $I_n + I_{n+1}$.
3. **Positivité** : la fonction est positive sur $[0; 1]$, donc $I_n \geq 0$.
4. **Monotonie** : étudie le signe de $I_{n+1} - I_n = \int (f_{n+1} - f_n)$ et utilise la positivité de l'intégrale.
5. **Limite** : encadre I_n , puis théorème des gendarmes.

Les pièges classiques

- Étudier la monotonie en comparant les **intégrales** au lieu de comparer les **fonctions** sous le signe somme.
- Oublier que $I_n \geq 0$ avant de conclure à la convergence.
- Dans une IPP, oublier le crochet et son signe.
- Passer à la limite dans une relation de récurrence sans avoir justifié la convergence.

Une suite d'intégrales, c'est une épreuve en trois actes : on calcule, on compare, on conclut. Sauter un acte, c'est perdre le fil de la pièce.

Exercice 1 (★★★) : la suite $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Montrer que, pour tout entier n , $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.
3. Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante, puis qu'elle converge.
4. Montrer que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de (I_n) .
5. Montrer que, pour $n \geq 1$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2n}$.

Correction de l'exercice 1

Question 1

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \left[\ln(1+x) \right]_0^1$$

$$I_0 = \ln 2$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) dx = \left[x - \ln(1+x) \right]_0^1$$

$$I_1 = 1 - \ln 2$$

Question 2

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Question 3

Positivité. Pour $x \in [0; 1]$, $\frac{x^n}{1+x} \geq 0$. Donc $I_n \geq 0$ par positivité de l'intégrale.

Monotonie.

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x} dx$$

Pour $x \in [0; 1]$: $x^n \geq 0$, $x-1 \leq 0$ et $1+x > 0$. L'intégrande est donc ≤ 0 . Donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$: la suite est décroissante.

Décroissante et minorée par 0 :

la suite converge.

Question 4

Pour $x \in [0; 1]$, $\frac{1}{1+x} \leq 1$. Donc $\frac{x^n}{1+x} \leq x^n$. Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

Comme $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$:

d'après le théorème des gendarmes, $\lim I_n = 0$

Question 5

La suite est décroissante, donc $I_{n+1} \leq I_n$. $\frac{1}{n+1} = I_n + I_{n+1} \leq 2I_n$. Donc $I_n \geq \frac{1}{2(n+1)}$.

De même, pour $n \geq 1$, $I_n \leq I_{n-1}$. $\frac{1}{n} = I_{n-1} + I_n \geq 2I_n$. Donc $I_n \leq \frac{1}{2n}$.

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2n}$$

On en déduit que nI_n tend vers $\frac{1}{2}$.

Exercice 2 (★★★) : la suite $J_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

1. Calculer J_0 et J_1 .

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J_{n+1} = (n+1)J_n - \frac{1}{e}$. En déduire J_2 .

3. Montrer que $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$ et déterminer la limite de (J_n) .

Correction de l'exercice 2

Question 1

$$J_0 = \int_0^1 e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^1$$

$$J_0 = 1 - \frac{1}{e}$$

$$J_1 = \int_0^1 x e^{-x} dx \text{ (fiche 3, exercice 5)}$$

$$J_1 = 1 - \frac{2}{e}$$

Question 2

On pose $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = x^{n+1}$. Alors $u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = (n+1)x^n$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0; 1]$.

Par intégration par parties :

$$J_{n+1} = \left[-x^{n+1} e^{-x} \right]_0^1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x} dx = -e^{-1} + (n+1)J_n$$

$$J_{n+1} = (n+1)J_n - \frac{1}{e}$$

$$\text{Pour } n = 1 : J_2 = 2J_1 - \frac{1}{e} = 2 - \frac{4}{e} - \frac{1}{e}$$

$$J_2 = 2 - \frac{5}{e} \approx 0,161$$

Question 3

Pour $x \in [0; 1]$, $0 \leq e^{-x} \leq 1$. Donc $0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n$. Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Comme $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$:

d'après le théorème des gendarmes, $\lim J_n = 0$

Exercice 3 (★★★) : les intégrales de Wallis

Pour tout entier n , on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$.

1. Calculer W_0 et W_1 .
2. Montrer que, pour tout n , $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$. En déduire W_2 , W_3 et W_4 .
3. Montrer que la suite (W_n) est positive et décroissante.

Correction de l'exercice 3

Question 1

$$W_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx$$

$$W_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{\pi/2}$$

$$W_1 = 1$$

Question 2

On écrit $\sin^{n+2} x = \sin^{n+1} x \times \sin x$. On pose $u'(x) = \sin x$ et $v(x) = \sin^{n+1} x$. Alors $u(x) = -\cos x$ et $v'(x) = (n+1) \sin^n x \cos x$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Par intégration par parties :

$$W_{n+2} = \left[-\cos x \sin^{n+1} x \right]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^n x \cos^2 x \, dx$$

Le crochet vaut 0 ($\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin 0 = 0$). Avec $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$:

$$W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^n x (1 - \sin^2 x) \, dx = (n+1) (W_n - W_{n+2})$$

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

$$W_2 = \frac{1}{2}W_0$$

$$W_2 = \frac{\pi}{4}$$

$$W_3 = \frac{2}{3}W_1$$

$$W_3 = \frac{2}{3}$$

$$W_4 = \frac{3}{4}W_2$$

$$W_4 = \frac{3\pi}{16}$$

Question 3

Pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin x \leq 1$. Donc $\sin^n x \geq 0$ et $\sin^{n+1} x \leq \sin^n x$. Par positivité et croissance de l'intégrale : $W_n \geq 0$ et $W_{n+1} \leq W_n$.

La suite est positive et décroissante, donc convergente.

Exercice 4 (★★) : la méthode des rectangles avec Python

On approche $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ avec la fonction `rectangles(f, a, b, n)` du cours (somme à gauche).

1. Écrire aussi la fonction de la somme à droite.
2. Pour $n = 10$ puis $n = 100$, donner S_g et S_d , et un encadrement de l'intégrale.
3. Quelle valeur de n garantit un encadrement d'amplitude inférieure à 0,001 ?

Correction de l'exercice 4

Question 1

```
def rectangles_droite(f, a, b, n):
    h = (b - a)/n
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + f(a + (k + 1)*h)
    return h*s
```

Question 2

La fonction $x \mapsto x^2$ est croissante et positive sur $[0; 1]$. Donc $S_g \leq \int_0^1 x^2 dx \leq S_d$.

Pour $n = 10$: $S_g = 0,285$ et $S_d = 0,385$.

$$0,285 \leq \int \leq 0,385$$

Pour $n = 100$: $S_g = 0,32835$ et $S_d = 0,33835$.

$$0,32835 \leq \int \leq 0,33835$$

Dans les deux cas, $\frac{1}{3} \approx 0,3333$ est bien dans l'encadrement.

Question 3

L'amplitude est $S_d - S_g = h[f(1) - f(0)] = \frac{1}{n}$. On veut $\frac{1}{n} < 0,001$.

$n > 1\,000$, par exemple $n = 1\,001$.

Exercice 5 (★★★) : la fonction $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

Cette fonction ne s'exprime pas avec les fonctions usuelles, mais on peut l'étudier.

1. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer F' . En déduire son sens de variation.

2. Montrer que F est impaire.

3. Montrer que, pour tout $t \in [0; x]$ avec $x \geq 0$, $1 - t^2 \leq e^{-t^2} \leq 1$. En déduire que $x - \frac{x^3}{3} \leq F(x) \leq x$.

En déduire un encadrement de $F(1)$.

Correction de l'exercice 5

Question 1

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc F est la primitive de cette fonction qui s'annule en 0. F est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$F'(x) = e^{-x^2} > 0$$

F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Question 2

Soit $g(x) = F(x) + F(-x)$. g est dérivable et $g'(x) = F'(x) - F'(-x) = e^{-x^2} - e^{-x^2} = 0$. Donc g est constante, égale à $g(0) = 2F(0) = 0$. Ainsi $F(-x) = -F(x)$.

F est impaire.

Question 3

Pour tout réel u , $e^u \geq 1 + u$ (inégalité de convexité). Avec $u = -t^2$: $e^{-t^2} \geq 1 - t^2$. Et $e^{-t^2} \leq 1$ car $-t^2 \leq 0$.

Pour $x \geq 0$, en intégrant de 0 à x :

$$\int_0^x (1 - t^2) dt \leq F(x) \leq \int_0^x 1 dt$$

$$x - \frac{x^3}{3} \leq F(x) \leq x$$

Pour $x = 1$:

$$\frac{2}{3} \leq F(1) \leq 1$$

(La valeur exacte est $F(1) \approx 0,747$.)

Exercice 6 (★★★) : des inégalités obtenues en intégrant

- Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$. En déduire que, pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
- Montrer que, pour tout $x \geq 0$: $\sin x \leq x$, puis $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$, puis $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$.

Correction de l'exercice 6

Question 1

Pour $t \geq 0$, $1+t \geq 1$, donc $\frac{1}{1+t} \leq 1$.

Et $\frac{1}{1+t} \geq 1-t \iff 1 \geq (1-t)(1+t) = 1-t^2$ (car $1+t > 0$). Ce qui est vrai.

Pour $x \geq 0$, on intègre de 0 à x :

$$\int_0^x (1-t) dt \leq \int_0^x \frac{dt}{1+t} \leq \int_0^x dt$$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \text{ pour } x \geq 0$$

Question 2

Pour tout t , $\cos t \leq 1$. Pour $x \geq 0$, on intègre de 0 à x :

$$(a) \sin x \leq x$$

Puis, pour tout $t \geq 0$, $\sin t \leq t$. En intégrant de 0 à x : $1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$.

$$(b) \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$$

Enfin, $\cos t \geq 1 - \frac{t^2}{2}$ pour $t \geq 0$. En intégrant de 0 à x :

$$(c) \sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$$

Contrôle numérique : pour $x = 0,5$, $\sin 0,5 \approx 0,4794$ et $0,5 - \frac{0,5^3}{6} \approx 0,4792$. Donc $0,4792 \leq 0,4794 \leq 0,5$

Exercice 7 (★★) : une valeur moyenne en modélisation

La température d'un objet, en °C, est $T(t) = 20 + 60e^{-t/10}$ pour $t \in [0; 10]$, où t est en minutes.

Calculer la température moyenne sur les dix premières minutes. Vérifier la cohérence avec $T(0)$ et $T(10)$.

Correction de l'exercice 7**Le calcul**

T est continue sur $[0; 10]$. La valeur moyenne est :

$$\mu = \frac{1}{10} \int_0^{10} (20 + 60e^{-t/10}) dt = \frac{1}{10} [20t - 600e^{-t/10}]_0^{10} = \frac{1}{10} [(200 - 600e^{-1}) - (0 - 600)] = 80 - 60e^{-1}$$

Or $80 - 60e^{-1} = 20 + 60(1 - e^{-1}) \approx 57,9$.

La température moyenne est d'environ 57,9 °C.

Cohérence

$T(0) = 80$ °C et $T(10) = 20 + 60e^{-1} \approx 42,1$ °C. Comme T est décroissante, la valeur moyenne est comprise entre $T(10)$ et $T(0)$: $42,1 \leq 57,9 \leq 80$

Exercice 8 (★★) : Python : méthode de Monte-Carlo

On veut approcher $I = \int_0^1 x^2 dx$. On tire N points au hasard dans le carré $[0; 1]^2$ et on compte ceux qui sont **sous la courbe** de $x \mapsto x^2$.

1. Écrire le programme.
2. Pourquoi la proportion de points sous la courbe approche-t-elle I ? Calculer I exactement et comparer.

Correction de l'exercice 8**Question 1**

```
from random import random

N = 100000
sous = 0
for i in range(N):
    x, y = random(), random()
    if y <= x * x:
        sous = sous + 1
print(sous / N)
```

Question 2

Le carré a pour aire 1 : la probabilité qu'un point tombe sous la courbe est l'**aire sous la courbe**, c'est-à-dire I (loi des grands nombres).

$$I = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \approx 0,3333.$$

Le programme affiche une valeur proche de **0,333**, avec une erreur typique de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

Exercice 9 (★★★) : une série pour $\ln 2$

Pour $x \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on admet l'identité $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-x)^k + \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}$.

1. En intégrant sur $[0; 1]$, montrer que $\ln 2 = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} + R_n$ avec $R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$.

2. Montrer que $|R_n| \leq \frac{1}{n+2}$. En déduire que la somme tend vers $\ln 2$.

3. Que renvoie ce programme ?

```
n = 1000
print(sum((-1) ** k / (k + 1) for k in range(n + 1)))
```

Correction de l'exercice 9

Question 1

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2 \text{ et } \int_0^1 (-x)^k dx = \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

$$\text{D'où } \ln 2 = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} + R_n.$$

Question 2

$$\text{Sur } [0; 1], \frac{x^{n+1}}{1+x} \leq x^{n+1}, \text{ donc } |R_n| \leq \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+2}.$$

$$\text{Comme } \frac{1}{n+2} \rightarrow 0, \text{ on a } R_n \rightarrow 0 : 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2.$$

Question 3

Le programme affiche environ **0,6926**, alors que $\ln 2 \approx 0,6931$: l'erreur est bien inférieure à $\frac{1}{1002} \approx 10^{-3}$.

La convergence est **lente**, ce qui est typique d'une majoration en $\frac{1}{n}$.

Ce qui peut tomber au bac

- Une **suite d'intégrales** avec relation de récurrence, monotonie et limite (exercices 1, 2, 3).
- La **méthode des rectangles** avec un algorithme Python (exercice 4).
- Une **fonction définie par une intégrale** à étudier sans la calculer (exercice 5).
- Des **inégalités obtenues par intégration** (exercice 6).
- Une **valeur moyenne** avec interprétation (exercice 7).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Si $f \leq g$ sur $[a; b]$ avec $a \leq b$, alors :

- A. $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ (bonne réponse)
 B. $\int_a^b f \geq \int_a^b g$
 C. $\int_a^b f = \int_a^b g$
 D. on ne peut rien dire

Justification : L'intégrale conserve l'ordre des fonctions (positivité).

2. Si $m \leq f \leq M$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f$ est compris entre :

- A. $m(b-a)$ et $M(b-a)$ (bonne réponse)
 B. m et M
 C. ma et Mb
 D. $m+b$ et $M+a$

Justification : On intègre l'encadrement : l'intégrale d'une constante c sur $[a; b]$ vaut $c(b-a)$.

3. Quelle est la limite de $I_n = \int_0^1 x^n dx$ quand $n \rightarrow +\infty$?

- A. $+\infty$
 B. 1
 C. 0 (bonne réponse)
 D. $\frac{1}{2}$

Justification : $I_n = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$.

4. Avec 2 rectangles « à gauche », quelle approximation de $\int_0^1 x^2 dx$ obtient-on ?

- A. $\frac{1}{3}$
 B. 0,125 (bonne réponse)
 C. 0,625
 D. 0,5

Justification : $\frac{1}{2} (f(0) + f(0,5)) = \frac{1}{2} (0 + 0,25) = 0,125$.

5. Si f est continue et positive sur $[a; b]$ et si $\int_a^b f = 0$, alors :

- A. f est nulle sur $[a; b]$ (bonne réponse)
- B. f est constante non nulle
- C. $a = b$ obligatoirement
- D. on ne peut rien dire

Justification : Une fonction continue positive d'intégrale nulle ne peut pas être strictement positive en un point : l'aire serait non nulle.

6. Dans l'exercice 1, avec $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$, que vaut I_0 ?

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\ln 2$ (bonne réponse)
- C. 1
- D. $1 - \ln 2$

Justification : $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$.

7. Dans l'exercice 2, avec $J_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$, quelle relation de récurrence obtient-on par intégration par parties ?

- A. $J_{n+1} = (n+1)J_n$
- B. $J_{n+1} = J_n - \frac{1}{e}$
- C. $J_{n+1} = (n+1)J_n - \frac{1}{e}$ (bonne réponse)
- D. $J_{n+1} = nJ_n$

Justification : On intègre par parties avec $u' = e^{-x}$ et $v = x^{n+1}$, ce qui fait apparaître $(n+1)J_n$ et un terme tout intégré $-\frac{1}{e}$.

8. Dans l'exercice 3 (intégrales de Wallis), que vaut $W_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$?

- A. 1
- B. $\frac{\pi}{2}$
- C. $\frac{\pi}{4}$ (bonne réponse)
- D. $\frac{2}{3}$

Justification : D'après la relation $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ avec $n=0$: $2W_2 = W_0 = \frac{\pi}{2}$, donc $W_2 = \frac{\pi}{4}$.

9. Dans l'exercice 5, avec $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, quel encadrement obtient-on pour $F(1)$?

- A. $1 \leq F(1) \leq 2$
- B. $0 \leq F(1) \leq \frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{3} \leq F(1) \leq 1$ (**bonne réponse**)

D. $F(1) = 1$ exactement

Justification : À partir de $x - \frac{x^3}{3} \leq F(x) \leq x$ pour $x \in [0; 1]$, en $x = 1$: $\frac{2}{3} \leq F(1) \leq 1$.

10. Dans l'exercice 7, avec $T(t) = 20 + 60e^{-t/10}$ sur $[0; 10]$, la température moyenne sur les dix premières minutes est d'environ :

A. 80 °C

B. 42,1 °C

C. 20 °C

D. 57,9 °C (**bonne réponse**)

Justification : On calcule $\frac{1}{10} \int_0^{10} T(t) dt$, cohérent avec un résultat entre $T(10) \approx 42$ et $T(0) = 80$.