

Fiche 3 : l'intégration par parties

Dix exercices pour maîtriser l'intégration par parties sous toutes ses formes :

- polynôme $\times$ exponentielle ;
- polynôme $\times$ trigonométrie ;
- le logarithme ;
- polynôme $\times$ logarithme ;
- double intégration par parties ;
- puissance du logarithme ;
- astuce du choix de la primitive ;
- le cas cyclique $e^x \cos x$.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- u' et v posés ;
- u et v' calculés ;
- régularité C^1 citée ;
- formule écrite avec son crochet ;
- intégrale restante calculée ;
- résultat.

Le modèle de rédaction d'une intégration par parties

« On pose $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$. Alors $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0; 1]$ et leurs dérivées u' et v' sont continues. Par intégration par parties :

$$\int_0^1 x e^x dx = \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1. »$$

- Écris u' , v , puis u , v' , dans cet ordre.
- Cite la **régularité** : u et v sont de classe C^1 (dérivées continues).
- Écris la formule avec son **crochet**, puis calcule l'intégrale restante.

Comment choisir u' et v

- **Polynôme $\times e^x$, $\cos$, $\sin$** : v = le polynôme (il baisse de degré en dérivant), u' = l'autre facteur.
- **$\ln x$ seul** : $u' = 1$ et $v = \ln x$.
- **Polynôme $\times \ln x$** : $v = \ln x$ (il se simplifie en $\frac{1}{x}$), u' = le polynôme.
- **$e^x \times \cos x$ ou $\sin x$** : deux fois, jusqu'à retrouver l'intégrale de départ.

Les pièges classiques

- Oublier le crochet ou son signe.
- Se tromper de signe devant la nouvelle intégrale (c'est un « - »).
- Choisir u' et v à l'envers, ce qui complique l'intégrale au lieu de la simplifier.
- Oublier de multiplier par la constante quand on intègre une seconde fois.

L'intégration par parties, c'est comme ranger un placard : si l'intégrale restante est plus en désordre que l'originale, c'est que tu as inversé les tiroirs.

Exercice 1 (★) : polynôme $\times$ exponentielle

Calculer $I = \int_0^1 x e^x dx$.

Exercice 2 (★) : polynôme $\times$ sinus

Calculer $I = \int_0^\pi x \sin x dx$.

Exercice 3 (★★) : le logarithme

Calculer $I = \int_1^e \ln x dx$.

Exercice 4 (★★) : polynôme $\times$ logarithme

Calculer $I = \int_1^e x \ln x dx$.

Exercice 5 (★★) : exponentielle décroissante

Calculer $I = \int_0^1 x e^{-x} dx$.

Exercice 6 (★★★) : deux intégrations par parties

Calculer $I = \int_0^1 x^2 e^x dx$.

Exercice 7 (★★) : polynôme $\times$ cosinus

$$\text{Calculer } I = \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx.$$

Exercice 8 (★★★★) : le carré du logarithme

$$\text{Calculer } I = \int_1^e (\ln x)^2 \, dx.$$

Exercice 9 (★★★★) : l'astuce de la primitive $u(x) = x + 1$

$$\text{Calculer } I = \int_0^1 \ln(1+x) \, dx.$$

Exercice 10 (★★★★) : le cas cyclique $e^x \cos x$

$$\text{Calculer } I = \int_0^\pi e^x \cos x \, dx. \text{ On pourra poser } J = \int_0^\pi e^x \sin x \, dx.$$

Ce qui peut tomber au bac sur l'intégration par parties

- Une **IPP guidée** où l'énoncé donne u et v (souvent avec un polynôme et e^x , ou $\ln x$).
- Le **logarithme** ou $x \ln x$ (exercices 3 et 4).
- Une **double IPP** (exercice 6) pour $x^2 e^x$.
- Une IPP dans une **suite d'intégrales** (fiche 4 et exercices type bac).
- Le **calcul d'une aire** dont la primitive demande une IPP (exercices type bac).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. La formule d'intégration par parties s'écrit :

- A. $\int_a^b u'v = [u'v]_a^b$
- B. $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$
- C. $\int_a^b u'v = \int_a^b u' \times \int_a^b v$
- D. $\int_a^b u'v = [uv]_a^b + \int_a^b uv'$

2. Que vaut $\int_0^1 x e^x dx$?
- A. 1
 - B. e
 - C. 0
 - D. $e - 1$
3. Que vaut $\int_1^e \ln x dx$?
- A. 0
 - B. $e - 1$
 - C. e
 - D. 1
4. Pour calculer $\int x \ln x dx$ par parties, on pose :
- A. $u' = \ln x$ et $v = x$
 - B. $u' = x \ln x$ et $v = 1$
 - C. $u' = x$ et $v = \ln x$
 - D. $u' = 1$ et $v = x \ln x$
5. Que vaut $\int_0^\pi x \sin x dx$?
- A. π
 - B. 0
 - C. 2
 - D. $-\pi$
6. Dans l'exercice 4, que vaut $I = \int_1^e x \ln x dx$?
- A. e^2
 - B. $\frac{e^2 - 1}{4}$
 - C. $\frac{e^2 + 1}{4}$
 - D. $\frac{e^2}{2}$
7. Dans l'exercice 5, que vaut $I = \int_0^1 x e^{-x} dx$?
- A. $-\frac{1}{e}$
 - B. $1 - \frac{2}{e}$
 - C. 1

D. $\frac{2}{e}$

8. Dans l'exercice 6, avec deux intégrations par parties, que vaut $I = \int_0^1 x^2 e^x dx$?

A. e

B. $e - 1$

C. $2e - 2$

D. $e - 2$

9. Dans l'exercice 9, en posant $u(x) = x + 1$, que vaut $I = \int_0^1 \ln(1 + x) dx$?

A. $2 \ln 2 - 1$

B. $\ln 2 - 1$

C. $\ln 2$

D. 1

10. Dans l'exercice 10 (cas cyclique), pour calculer $I = \int_0^\pi e^x \cos x dx$, quelle méthode utilise-t-on ?

A. Un changement de variable

B. La relation de Chasles

C. Deux intégrations par parties, qui font réapparaître I dans un système avec $J = \int_0^\pi e^x \sin x dx$

D. La linéarisation trigonométrique