

Fiche 3 : l'intégration par parties

Dix exercices pour maîtriser l'intégration par parties sous toutes ses formes :

- polynôme $\times$ exponentielle ;
- polynôme $\times$ trigonométrie ;
- le logarithme ;
- polynôme $\times$ logarithme ;
- double intégration par parties ;
- puissance du logarithme ;
- astuce du choix de la primitive ;
- le cas cyclique $e^x \cos x$.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- u' et v posés ;
- u et v' calculés ;
- régularité C^1 citée ;
- formule écrite avec son crochet ;
- intégrale restante calculée ;
- résultat.

Le modèle de rédaction d'une intégration par parties

« On pose $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$. Alors $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0; 1]$ et leurs dérivées u' et v' sont continues. Par intégration par parties :

$$\int_0^1 x e^x dx = \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1. »$$

- Écris u' , v , puis u , v' , dans cet ordre.
- Cite la **régularité** : u et v sont de classe C^1 (dérivées continues).
- Écris la formule avec son **crochet**, puis calcule l'intégrale restante.

Comment choisir u' et v

- **Polynôme $\times e^x$, $\cos$, $\sin$** : v = le polynôme (il baisse de degré en dérivant), u' = l'autre facteur.
- **$\ln x$ seul** : $u' = 1$ et $v = \ln x$.
- **Polynôme $\times \ln x$** : $v = \ln x$ (il se simplifie en $\frac{1}{x}$), u' = le polynôme.
- **$e^x \times \cos x$ ou $\sin x$** : deux fois, jusqu'à retrouver l'intégrale de départ.

Les pièges classiques

- Oublier le crochet ou son signe.
- Se tromper de signe devant la nouvelle intégrale (c'est un « - »).
- Choisir u' et v à l'envers, ce qui complique l'intégrale au lieu de la simplifier.
- Oublier de multiplier par la constante quand on intègre une seconde fois.

L'intégration par parties, c'est comme ranger un placard : si l'intégrale restante est plus en désordre que l'originale, c'est que tu as inversé les tiroirs.

Exercice 1 (★) : polynôme $\times$ exponentielle

Calculer $I = \int_0^1 x e^x dx$.

Correction de l'exercice 1**Le choix**

On pose $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$. Alors $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0; 1]$.

Le calcul

Par intégration par parties :

$$I = \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - \left[e^x \right]_0^1 = e - (e - 1)$$

$$I = 1$$

Exercice 2 (★) : polynôme $\times$ sinus

Calculer $I = \int_0^\pi x \sin x dx$.

Correction de l'exercice 2**Le choix**

On pose $u'(x) = \sin x$ et $v(x) = x$. Alors $u(x) = -\cos x$ et $v'(x) = 1$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0; \pi]$.

Le calcul

Par intégration par parties :

$$I = \left[-x \cos x \right]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x) dx = (-\pi \cos \pi + 0) + \int_0^\pi \cos x dx = \pi + \left[\sin x \right]_0^\pi = \pi + 0$$

$$I = \pi$$

Exercice 3 (★★) : le logarithme

Calculer $I = \int_1^e \ln x dx$.

Correction de l'exercice 3

Le choix

On pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln x$. Alors $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[1; e]$.

Le calcul

Par intégration par parties :

$$I = \left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} dx = (e - 0) - \int_1^e 1 dx = e - (e - 1)$$

$$I = 1$$

On retrouve la primitive $x \ln x - x$ de $\ln$.

Exercice 4 (★★) : polynôme $\times$ logarithme

Calculer $I = \int_1^e x \ln x dx$.

Correction de l'exercice 4

Le choix

On pose $u'(x) = x$ et $v(x) = \ln x$. Alors $u(x) = \frac{x^2}{2}$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[1; e]$.

Le calcul

Par intégration par parties :

$$I = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4}$$

$$I = \frac{e^2 + 1}{4}$$

Exercice 5 (★★) : exponentielle décroissante

Calculer $I = \int_0^1 x e^{-x} dx$.

Correction de l'exercice 5

Le choix

On pose $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = x$. Alors $u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = 1$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0; 1]$.

Le calcul

Par intégration par parties :

$$I = \left[-x e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) dx = -e^{-1} + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} + \left[-e^{-x} \right]_0^1 = -e^{-1} + (1 - e^{-1})$$

$$I = 1 - \frac{2}{e} \approx 0,264$$

Exercice 6 (★★★) : deux intégrations par parties

Calculer $I = \int_0^1 x^2 e^x dx$.

Correction de l'exercice 6

Le choix

On pose $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x^2$. Alors $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 2x$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0; 1]$.

Le calcul

Par intégration par parties :

$$I = \left[x^2 e^x \right]_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx = e - 2 \int_0^1 x e^x dx$$

Or $\int_0^1 x e^x dx = 1$ (exercice 1). Donc :

$$I = e - 2 \times 1$$

$$I = e - 2 \approx 0,718$$

Exercice 7 (★★) : polynôme $\times$ cosinus

Calculer $I = \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$.

Correction de l'exercice 7

Le choix

On pose $u'(x) = \cos x$ et $v(x) = x$. Alors $u(x) = \sin x$ et $v'(x) = 1$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Le calcul

Par intégration par parties :

$$I = \left[x \sin x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} - \left[-\cos x \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - (0 + 1)$$

$$I = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,571$$

Exercice 8 (★★★) : le carré du logarithme

Calculer $I = \int_1^e (\ln x)^2 \, dx$.

Correction de l'exercice 8

Le choix

On pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = (\ln x)^2$. Alors $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[1; e]$.

Le calcul

Par intégration par parties :

$$I = \left[x(\ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e x \times \frac{2 \ln x}{x} \, dx = e - 2 \int_1^e \ln x \, dx$$

On utilise $\int_1^e \ln x \, dx = 1$ (exercice 3) : $I = e - 2 \times 1$.

$$I = e - 2$$

Exercice 9 (★★★) : l'astuce de la primitive $u(x) = x + 1$

Calculer $I = \int_0^1 \ln(1+x) dx$.

Correction de l'exercice 9

Le choix

On pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(1+x)$. Alors $v'(x) = \frac{1}{1+x}$.

On choisit la primitive $u(x) = x + 1$ (et non $u(x) = x$). C'est aussi une primitive de 1, et cela simplifie la suite. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0; 1]$.

Le calcul

Par intégration par parties :

$$I = \left[(x+1) \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 (x+1) \times \frac{1}{1+x} dx = 2 \ln 2 - \int_0^1 1 dx$$

$$I = 2 \ln 2 - 1 \approx 0,386$$

Remarque : avec $u(x) = x$, on obtiendrait $\int_0^1 \frac{x}{1+x} dx$, qu'il faudrait décomposer. Le choix $u(x) = x + 1$ fait gagner du temps.

Exercice 10 (★★★) : le cas cyclique $e^x \cos x$

Calculer $I = \int_0^\pi e^x \cos x dx$. On pourra poser $J = \int_0^\pi e^x \sin x dx$.

Correction de l'exercice 10

Première intégration par parties

On pose $u'(x) = \cos x$ et $v(x) = e^x$. Alors $u(x) = \sin x$ et $v'(x) = e^x$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0; \pi]$.

$$I = \left[e^x \sin x \right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \sin x dx = 0 - J$$

Donc $I = -J$.

Seconde intégration par parties

On pose $u'(x) = \sin x$ et $v(x) = e^x$. Alors $u(x) = -\cos x$ et $v'(x) = e^x$.

$$J = \left[-e^x \cos x \right]_0^\pi + \int_0^\pi e^x \cos x dx = (e^\pi + 1) + I$$

Résolution

De $I = -J$ et $J = e^\pi + 1 + I$, on obtient :

$$I = -(e^\pi + 1) - I$$

$$2I = -(e^\pi + 1)$$

$$I = -\frac{e^\pi + 1}{2} \approx -12,07$$

Contrôle de cohérence : sur $[0; \pi]$, $\cos x$ est positif sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et négatif sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, où e^x est le plus grand. Une intégrale négative est plausible.

Ce qui peut tomber au bac sur l'intégration par parties

- Une **IPP guidée** où l'énoncé donne u et v (souvent avec un polynôme et e^x , ou $\ln x$).
- Le **logarithme** ou $x \ln x$ (exercices 3 et 4).
- Une **double IPP** (exercice 6) pour $x^2 e^x$.
- Une IPP dans une **suite d'intégrales** (fiche 4 et exercices type bac).
- Le **calcul d'une aire** dont la primitive demande une IPP (exercices type bac).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. La formule d'intégration par parties s'écrit :

- A. $\int_a^b u'v = [u'v']_a^b$
- B. $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv' \text{ (bonne réponse)}$
- C. $\int_a^b u'v = \int_a^b u' \times \int_a^b v$
- D. $\int_a^b u'v = [uv]_a^b + \int_a^b uv'$

Justification : C'est l'intégration de la formule de dérivation d'un produit.

2. Que vaut $\int_0^1 x e^x dx$?

- A. 1 (**bonne réponse**)

- B. e
- C. 0
- D. $e - 1$

Justification : Avec $u' = e^x$ et $v = x : [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1$.

3. Que vaut $\int_1^e \ln x dx$?

- A. 0
- B. $e - 1$
- C. e
- D. 1 (**bonne réponse**)

Justification : Avec $u' = 1$ et $v = \ln x : [x \ln x - x]_1^e = (e - e) - (0 - 1) = 1$.

4. Pour calculer $\int x \ln x dx$ par parties, on pose :

- A. $u' = \ln x$ et $v = x$
- B. $u' = x \ln x$ et $v = 1$
- C. $u' = x$ et $v = \ln x$ (**bonne réponse**)
- D. $u' = 1$ et $v = x \ln x$

Justification : On dérive le logarithme (ce qui le simplifie) et on intègre le facteur x .

5. Que vaut $\int_0^\pi x \sin x dx$?

- A. π (**bonne réponse**)
- B. 0
- C. 2
- D. $-\pi$

Justification : $[-x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi + 0 = \pi$.

6. Dans l'exercice 4, que vaut $I = \int_1^e x \ln x dx$?

- A. e^2
- B. $\frac{e^2 - 1}{4}$
- C. $\frac{e^2 + 1}{4}$ (**bonne réponse**)
- D. $\frac{e^2}{2}$

Justification : Avec $u' = x$, $v = \ln x : I = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$.

7. Dans l'exercice 5, que vaut $I = \int_0^1 x e^{-x} dx$?

- A. $-\frac{1}{e}$
- B. $1 - \frac{2}{e}$ (bonne réponse)
- C. 1
- D. $\frac{2}{e}$

Justification : Avec $u' = e^{-x}$, $v = x$: $I = [-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} + (1 - e^{-1}) = 1 - \frac{2}{e}$.

8. Dans l'exercice 6, avec deux intégrations par parties, que vaut $I = \int_0^1 x^2 e^x dx$?

- A. e
- B. $e - 1$
- C. $2e - 2$
- D. $e - 2$ (bonne réponse)

Justification : On intègre par parties deux fois de suite (en dérivant x^2 à chaque étape) pour arriver à $I = e - 2$.

9. Dans l'exercice 9, en posant $u(x) = x + 1$, que vaut $I = \int_0^1 \ln(1+x) dx$?

- A. $2\ln 2 - 1$ (bonne réponse)
- B. $\ln 2 - 1$
- C. $\ln 2$
- D. 1

Justification : Avec $u' = 1$, $v = \ln(1+x)$: $I = [x \ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \ln 2 - (1 - \ln 2) = 2\ln 2 - 1$.

10. Dans l'exercice 10 (cas cyclique), pour calculer $I = \int_0^\pi e^x \cos x dx$, quelle méthode utilise-t-on ?

- A. Un changement de variable
- B. La relation de Chasles
- C. Deux intégrations par parties, qui font réapparaître I dans un système avec $J = \int_0^\pi e^x \sin x dx$ (bonne réponse)
- D. La linéarisation trigonométrique

Justification : Intégrer par parties deux fois fait réapparaître I : on obtient un système linéaire en I et J qu'on résout.