

Fiche 2 : les aires

Neuf exercices pour maîtriser tous les calculs d'aires du programme :

- aire sous une courbe ;
- aire entre deux courbes, avec recherche des points d'intersection ;
- fonction de signe variable ;
- domaine délimité par une courbe et des droites ;
- aire et limite quand une borne tend vers l'infini ;
- recherche d'un paramètre ;
- symétrie ;
- encadrement par des rectangles ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- signe étudié et justifié ;
- intersections calculées ;
- « haut moins bas » écrit ;
- primitive et crochet ;
- conclusion en unités d'aire (puis en cm^2 si demandé).

Le modèle de rédaction d'un calcul d'aire

« Les courbes se coupent en $x = 0$ et $x = 1$ ($x^2 = x \iff x(x - 1) = 0$). Sur $[0; 1]$, $x \geq x^2$, donc la courbe de $f : x \mapsto x$ est au-dessus de celle de $g : x \mapsto x^2$. L'aire du domaine est :

$$A = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ u.a. »}$$

- Calcule les **abscisses d'intersection** quand on parle d'aire entre deux courbes.
- Justifie la **position relative** (« haut » et « bas »).
- Écris $A = \int (\text{haut} - \text{bas})$, primitive, crochet, résultat **en u.a.**

Les pièges classiques

- Calculer $\int f$ pour une fonction qui change de signe et l'appeler « aire ».
- Oublier de justifier quelle courbe est au-dessus de l'autre.
- Oublier l'unité d'aire, ou la conversion demandée en cm^2 .
- Prendre les mauvaises bornes : celles de l'énoncé, ou les abscisses d'intersection.

Une aire négative, ça n'existe pas : si tu en trouves une, c'est que tu as soustrait dans le mauvais sens (ou que tu dois retourner ton sujet).

Exercice 1 (★) : aire sous une courbe et conversion

Le plan est muni d'un repère orthogonal d'unités :

- 2 cm sur l'axe des abscisses ;
- 3 cm sur l'axe des ordonnées.

Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites $x = a$ et $x = b$:

1. $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 3$

2. $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$, $b = e$

3. $f(x) = \sin x$, $a = 0$, $b = \pi$

4. $f(x) = e^x$, $a = 0$, $b = \ln 3$

Donner ensuite l'aire du 1. en cm^2 .

Correction de l'exercice 1

Méthode

Ces quatre fonctions sont continues et positives sur l'intervalle des bornes. L'aire est $A = \int_a^b f(x) dx$.

Question 1

$$A = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 9 - 0$$

$$A = 9 \text{ u.a.}$$

Question 2

$$A = \left[\ln x \right]_1^e = 1 - 0$$

$$A = 1 \text{ u.a.}$$

Question 3

$$A = \left[-\cos x \right]_0^{\pi} = 1 + 1$$

$$A = 2 \text{ u.a.}$$

Question 4

$$A = \left[e^x \right]_0^{\ln 3} = 3 - 1$$

$$A = 2 \text{ u.a.}$$

Conversion

Une unité d'aire est l'aire d'un rectangle de 2 cm sur 3 cm, soit 6 cm². Pour l'aire du 1. : 9×6

$$54 \text{ cm}^2$$

Exercice 2 (★★) : aire entre deux courbes

Calculer l'aire du domaine compris entre les courbes de f et g :

1. $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$
2. $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$
3. $f(x) = e^x$ et $g(x) = x + 1$, pour $x \in [0; 1]$
4. $f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = x + 2$

Correction de l'exercice 2

Question 1

Intersection : $x = x^2 \iff x(x - 1) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 1$. Sur $[0; 1]$, $x \geq x^2$: la courbe de f est au-dessus.

$$A = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{1}{6} \text{ u.a.}$$

Question 2

Intersection : $\sqrt{x} = x^2 \iff x = x^4 \ (x \geq 0) \iff x(1 - x^3) = 0$. Donc $x = 0$ ou $x = 1$. Sur $[0; 1]$, $\sqrt{x} \geq x^2$ (par exemple en $\frac{1}{4}$: $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{16}$).

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{2}{3} x\sqrt{x} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{1}{3} \text{ u.a.}$$

Question 3

Sur $[0; 1]$, $e^x \geq x + 1$. C'est l'inégalité de convexité : la courbe de **exp** est au-dessus de sa tangente en 0.

$$A = \int_0^1 (e^x - x - 1) dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2} - x \right]_0^1 = \left(e - \frac{1}{2} - 1 \right) - 1$$

$$A = e - \frac{5}{2} \approx 0,218 \text{ u.a.}$$

Question 4

Intersection : $4 - x^2 = x + 2 \iff x^2 + x - 2 = 0 \iff (x + 2)(x - 1) = 0$. Donc $x = -2$ ou $x = 1$. Sur $[-2; 1]$: $(4 - x^2) - (x + 2) = -x^2 - x + 2 = -(x + 2)(x - 1) \geq 0$. La parabole est au-dessus de la droite.

$$A = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1 = \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3} \right) = \frac{7}{6} + \frac{10}{3}$$

$$A = \frac{9}{2} \text{ u.a.}$$

Exercice 3 (★★★) : une fonction de signe variable

Pour chaque fonction, calculer $\int_a^b f$, puis l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$:

1. $f(x) = x^3 - x$ sur $[-1; 1]$
2. $f(x) = \sin x$ sur $[0; 2\pi]$
3. $f(x) = x^2 - 1$ sur $[0; 2]$

Correction de l'exercice 3

Méthode

Quand f change de signe, l'aire est $\int_a^b |f|$. On découpe aux points où f s'annule. On change le signe des parties négatives.

Question 1

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x^3 - x) dx &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \\ &= 0 \text{ (} f \text{ est impaire)} \end{aligned}$$

Étude du signe : $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$. Sur $[-1; 0]$, $f \geq 0$. Sur $[0; 1]$, $f \leq 0$. Par symétrie :

$$A = 2 \int_0^1 (x - x^3) dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)$$

$$A = \frac{1}{2} \text{ u.a.}$$

Question 2

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^{2\pi} = -1 + 1$$

$$= 0$$

Sur $[0; \pi]$, $\sin x \geq 0$. Sur $[\pi; 2\pi]$, $\sin x \leq 0$.

$$A = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = 2 + 2$$

$$A = 4 \text{ u.a.}$$

Question 3

$$\int_0^2 (x^2 - 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_0^2 = \frac{8}{3} - 2$$

$$= \frac{2}{3}$$

Étude du signe : $x^2 - 1 \leq 0$ sur $[0; 1]$ et ≥ 0 sur $[1; 2]$.

$$A = \int_0^1 (1 - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 = \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right)$$

$$A = 2 \text{ u.a.}$$

Conclusion : l'intégrale n'est pas l'aire quand f change de signe.

Exercice 4 (★★) : le logarithme et un domaine borné

1. Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe de $\ln$, l'axe des abscisses et la droite $x = e$.
2. Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe de $\ln$, la droite $y = 1$ et l'axe des ordonnées, pour $1 \leq x \leq e$.

Correction de l'exercice 4

Méthode

On utilise la primitive $x \ln x - x$ de $\ln$. On l'établit par dérivation : $(x \ln x - x)' = \ln x + 1 - 1 = \ln x$.

Question 1

Sur $[1; e]$, $\ln x \geq 0$.

$$A = \int_1^e \ln x \, dx = \left[x \ln x - x \right]_1^e = (e - e) - (0 - 1)$$

$A = 1$ u.a.

Question 2

Sur $[1; e]$, $\ln x \leq 1$ (car $\ln$ est croissante et $\ln e = 1$). La droite $y = 1$ est donc au-dessus.

$$A = \int_1^e (1 - \ln x) \, dx = (e - 1) - 1$$

$A = e - 2 \approx 0,72$ u.a.

Contrôle : les deux aires 1 et $e - 2$ se complètent dans le rectangle $[1; e] \times [0; 1]$ d'aire $e - 1$.
 $1 + (e - 2) = e - 1$

Exercice 5 (★★★) : une aire qui dépend d'une borne

On note $A(a)$ l'aire du domaine compris entre la courbe de f , l'axe des abscisses, la droite d'abscisse de départ et la droite $x = a$. Déterminer $A(a)$ et sa limite quand $a \rightarrow +\infty$:

1. $f(x) = e^{-x}$ sur $[0; a]$
2. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $[1; a]$
3. $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1; a]$
4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1; a]$

Correction de l'exercice 5

Question 1

$$A(a) = \left[-e^{-x} \right]_0^a = 1 - e^{-a}. \text{ Comme } e^{-a} \rightarrow 0 :$$

$A(a) \rightarrow 1$ (l'aire reste bornée)

Question 2

$$A(a) = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^a = 1 - \frac{1}{a}. \text{ Comme } \frac{1}{a} \rightarrow 0 :$$

$A(a) \rightarrow 1$

Question 3

$$A(a) = \left[\ln x \right]_1^a = \ln a. \text{ Comme } \ln a \rightarrow +\infty :$$

$$A(a) \rightarrow +\infty \text{ (l'aire n'est pas bornée)}$$

Question 4

$$A(a) = \left[2\sqrt{x} \right]_1^a = 2\sqrt{a} - 2. \text{ Comme } \sqrt{a} \rightarrow +\infty :$$

$$A(a) \rightarrow +\infty$$

À retenir : un domaine infiniment long peut avoir une aire finie (cas 1 et 2) ou infinie (cas 3 et 4).

Exercice 6 (★★★) : trouver un paramètre

- Déterminer $a > 0$ tel que l'aire du domaine sous la courbe de $x \mapsto x^2$ sur $[0; a]$ soit égale à 9 u.a.
- Déterminer $a > 0$ tel que l'aire du domaine sous la courbe de $\exp$ sur $[0; a]$ soit égale à 5 u.a.
- Pour $a > 0$, la parabole $y = ax^2$ et la droite $y = x$ délimitent un domaine. Déterminer a pour que son aire soit égale à $\frac{1}{24}$ u.a.

Correction de l'exercice 6

Question 1

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}. \frac{a^3}{3} = 9 \iff a^3 = 27$$

$$a = 3$$

Question 2

$$\int_0^a e^x dx = e^a - 1. e^a - 1 = 5 \iff e^a = 6$$

$$a = \ln 6$$

Question 3

Intersection : $ax^2 = x \iff x(ax - 1) = 0$. Donc $x = 0$ ou $x = \frac{1}{a}$. Sur $\left[0; \frac{1}{a}\right]$, $x \geq ax^2$ (car $x(1 - ax) \geq 0$).

L'aire est :

$$A = \int_0^{1/a} (x - ax^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{ax^3}{3} \right]_0^{1/a} = \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{3a^2} = \frac{1}{6a^2}$$

On veut $\frac{1}{6a^2} = \frac{1}{24}$, soit $a^2 = 4$. Comme $a > 0$:

$$a = 2$$

Exercice 7 (★★) : une aire par symétrie

Calculer l'aire du domaine compris entre la parabole d'équation $y = 1 - x^2$ et l'axe des abscisses.

Correction de l'exercice 7

La parabole coupe l'axe des abscisses en $x = -1$ et $x = 1$ ($1 - x^2 = 0$). Et $1 - x^2 \geq 0$ sur $[-1; 1]$.

Comme la fonction est paire :

$$A = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = 2 \int_0^1 (1 - x^2) dx = 2 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2 \times \frac{2}{3}$$

$$A = \frac{4}{3} \text{ u.a.}$$

Exercice 8 (★★★) : encadrer une aire avec des rectangles

On considère $f(x) = x^2$ sur $[0; 1]$, que l'on partage en $n = 4$ intervalles de même longueur.

Calculer :

- la somme S_g des aires des rectangles « inférieurs » ;
- la somme S_d des rectangles « supérieurs ».

Puis encadrer l'aire A sous la courbe. Vérifier avec le calcul exact.

Correction de l'exercice 8

Les données

La fonction f est croissante sur $[0; 1]$, et $h = \frac{1}{4}$. Les rectangles inférieurs ont pour hauteurs $f(0)$, $f\left(\frac{1}{4}\right)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{3}{4}\right)$. Les supérieurs ont pour hauteurs $f\left(\frac{1}{4}\right)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{3}{4}\right)$, $f(1)$.

Les sommes

$$S_g = \frac{1}{4} \left(0 + \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{14}{16} = \frac{14}{64}$$

$$S_g = 0,21875$$

$$S_d = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16} + \frac{16}{16} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{30}{16} = \frac{30}{64}$$

$$S_d = 0,46875$$

Encadrement

Comme f est croissante et positive :

$$S_g \leq A \leq S_d, \text{ soit } 0,21875 \leq A \leq 0,46875$$

$$\text{L'amplitude est } S_d - S_g = h[f(1) - f(0)] = \frac{1}{4}.$$

Vérification

$$A = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \approx 0,333. \text{ Ce nombre appartient bien à l'encadrement.}$$

Exercice 9 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Si f est continue sur $[a; b]$ et si $\int_a^b f = 0$, alors l'aire du domaine entre la courbe et l'axe est nulle.
2. L'aire du domaine entre les courbes de f et g sur $[a; b]$ est toujours $\int_a^b (f - g)$.
3. Le domaine sous la courbe de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $[1; +\infty[$ a une aire finie.
4. Deux fonctions qui ont la même intégrale sur $[a; b]$ ont la même courbe.

Correction de l'exercice 9

Affirmation 1

Contre-exemple : $f(x) = x$ sur $[-1; 1]$. Son intégrale est 0, mais l'aire du domaine vaut 1.

Faux.

Affirmation 2

Cette formule n'est valable que si $f \geq g$ sur $[a; b]$. Sinon, il faut découper (ou calculer $\int |f - g|$).

Faux.

Affirmation 3

D'après l'exercice 5, l'aire sur $[1; a]$ vaut $1 - \frac{1}{a} \rightarrow 1$ quand $a \rightarrow +\infty$.

Vrai.

Affirmation 4

Contre-exemple : $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{2}$. Elles ont toutes deux pour intégrale $\frac{1}{2}$ sur $[0; 1]$, mais des courbes différentes.

Faux.**Ce qui peut tomber au bac sur les aires**

- L'**aire sous une courbe** avec conversion en cm^2 (exercice 1).
- L'**aire entre deux courbes** avec intersections et position relative (exercice 2).
- Une fonction de **signe variable** à découper (exercice 3).
- Une **aire dépendant d'un paramètre**, avec limite ou équation (exercices 5 et 6).
- Un **encadrement par des rectangles** (exercice 8).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Si $f \geq 0$ sur $[a; b]$, l'intégrale $\int_a^b f$ est :

- A. l'aire, en unités d'aire, sous la courbe de f (**bonne réponse**)
- B. la longueur de la courbe
- C. la valeur moyenne de f
- D. le coefficient directeur de la tangente

Justification : L'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$.

2. L'aire entre deux courbes avec $f \geq g$ sur $[a; b]$ vaut :

- A. $\int_a^b (g - f)$
- B. $\int_a^b f + \int_a^b g$
- C. $\int_a^b (f - g)$ (**bonne réponse**)
- D. $\int_a^b f g$

Justification : On intègre la différence « courbe du haut moins courbe du bas ».

3. Quelle est l'aire, en unités d'aire, du domaine sous la courbe de $x \mapsto x^2$ entre 0 et 3 ?

A. 9 (bonne réponse)

B. 27

C. 3

D. 6

$$\text{Justification : } \int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 9.$$

4. Si $f \leq 0$ sur $[a; b]$, l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses vaut :

A. $b - a$

B. $-\int_a^b f$ (bonne réponse)

C. $\int_a^b f$

D. 0

Justification : L'intégrale est négative dans ce cas : l'aire est son opposée.

5. Quelle est la valeur moyenne de $x \mapsto x^2$ sur $[0; 3]$?

A. 27

B. 1

C. 9

D. 3 (bonne réponse)

$$\text{Justification : } \frac{1}{3-0} \int_0^3 x^2 dx = \frac{9}{3} = 3.$$

6. Dans l'exercice 2, quelle est l'aire entre les courbes de $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$?

A. $\frac{1}{3}$ u.a.

B. 1 u.a.

C. $\frac{1}{2}$ u.a.

D. $\frac{1}{6}$ u.a. (bonne réponse)

$$\text{Justification : } \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

7. Dans l'exercice 3, avec $f(x) = x^3 - x$ sur $[-1; 1]$, que vaut $\int_{-1}^1 f(x) dx$?

A. $\frac{1}{2}$

B. 0, car f est impaire (bonne réponse)

C. 2

D. $-\frac{1}{2}$

Justification : f est impaire et l'intervalle est symétrique : l'intégrale est nulle, bien que l'**aire** (en valeur absolue) soit non nulle.

8. Dans l'exercice 5, avec $f(x) = e^{-x}$ sur $[0; a]$, quelle est la limite de l'aire $A(a)$ quand $a \rightarrow +\infty$?

- A. 0
- B. $+\infty$
- C. e
- D. 1 (l'aire reste bornée) (bonne réponse)

Justification : $A(a) = 1 - e^{-a} \rightarrow 1$: même si le domaine s'étend à l'infini, son aire reste finie.

9. Dans l'exercice 6, pour quelle valeur de $a > 0$ l'aire sous la courbe de $x \mapsto x^2$ sur $[0; a]$ vaut-elle 9 u.a. ?

- A. $a = 9$
- B. $a = 27$
- C. $a = \sqrt{3}$
- D. $a = 3$ (bonne réponse)

Justification : $\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3} = 9 \iff a^3 = 27 \iff a = 3.$

10. Dans l'exercice 8, avec $f(x) = x^2$ sur $[0; 1]$ partagé en 4 rectangles, quel encadrement obtient-on pour l'aire A ?

- A. $A = 0,25$ exactement
- B. $0,3 \leq A \leq 0,4$
- C. $0,21875 \leq A \leq 0,46875$ (bonne réponse)
- D. $0 \leq A \leq 1$

Justification : Les rectangles « inférieurs » sous-estiment l'aire, les « supérieurs » la surestiment : $S_g \leq A \leq S_d$.