

Fiche 1 : calculer des intégrales et utiliser leurs propriétés

Dix exercices pour maîtriser :

- le calcul d'intégrales avec les primitives ;
- la linéarité et la relation de Chasles ;
- la positivité et la croissance ;
- les encadrements ;
- la valeur moyenne ;
- les fonctions paires et impaires ;
- les fonctions définies par une intégrale ;
- les vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- primitive écrite avec sa forme reconnue ;
- crochet $\left[F(x)\right]$ avant de remplacer ;
- propriété citée ;
- conclusion.

Le modèle de rédaction d'un calcul d'intégrale

« La fonction $f : x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 1}$ est continue sur $[0 ; 1]$. Elle est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$. Donc $F(x) = \ln(x^2 + 1)$ en est une primitive. Alors :

$$\int_0^1 f(x) dx = \left[\ln(x^2 + 1) \right]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2. \text{ »}$$

- Justifie que la fonction est **continue** sur l'intervalle des bornes.
- Reconnais la forme, donne **une primitive**, écris le **crochet**, puis remplace.
- Pour un encadrement : **encadre la fonction**, cite la propriété, intègre.

Les pièges classiques

- Oublier le crochet et écrire « $F(x) = \dots$ » comme si c'était l'intégrale.
- Se tromper de signe dans $F(b) - F(a)$ quand $F(a)$ est négatif.
- Écrire $\int fg = \left(\int f\right) \left(\int g\right)$.
- Utiliser la croissance de l'intégrale avec les bornes dans le mauvais ordre.

Une intégrale sans crochet, c'est un compte rendu sans date : on comprend l'idée, mais on ne sait plus d'où ça vient.

Exercice 1 (★) : intégrales avec les primitives usuelles

Calculer :

1. $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) dx$

2. $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

3. $\int_0^1 e^{2x} dx$

4. $\int_0^\pi \sin x dx$

5. $\int_0^{\pi/2} \cos 2x dx$

6. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

Exercice 2 (★★) : intégrales de fonctions composées

Calculer :

1. $\int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx$

2. $\int_0^1 x e^{x^2} dx$

3. $\int_0^1 x (x^2 + 1)^3 dx$

4. $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx$

5. $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

6. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

Exercice 3 (★) : linéarité et relation de Chasles

Soient f et g continues sur $[0; 5]$. On sait que :

- $\int_0^2 f = 3$;
- $\int_2^5 f = 4$;
- $\int_0^2 g = -1$.

Calculer :

1. $\int_0^5 f$

2. $\int_0^2 (2f - 3g)$

3. $\int_5^2 f$

4. $\int_0^2 (f + g)$

Exercice 4 (★★) : encadrer sans calculer

1. Montrer que $\int_0^1 e^{x^2} dx \geq 1$.
2. Montrer que $e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$.
3. Montrer que $\frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx \leq 1$, puis vérifier avec le calcul exact.

Exercice 5 (★★) : valeurs moyennes

Déterminer la valeur moyenne :

1. de $x \mapsto x^2$ sur $[0; 3]$
2. de $\sin$ sur $[0; \pi]$
3. de $\exp$ sur $[0; \ln 2]$
4. de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $[1; e]$

Exercice 6 (★★) : l'inégalité de la moyenne

Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sur $[0; 1]$. Encadrer f , puis encadrer $\int_0^1 f(x) dx$.

Exercice 7 (★★★) : fonctions paires et impaires

1. Calculer $\int_{-1}^1 x^3 dx$ et $\int_{-1}^1 x^2 dx$.
2. Soit f continue et impaire sur $[-a; a]$, et F une primitive de f . Montrer que $F(-x) - F(x)$ est constante. En déduire que $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.
3. Soit f continue et paire sur $[-a; a]$, et F une primitive de f . Montrer que $F(x) + F(-x)$ est constante. En déduire que $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

Exercice 8 (★★) : fonctions définies par une intégrale**Déterminer une expression simple de :**

1. $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ pour $x > 0$

2. $G(x) = \int_0^x e^{-t} dt$

3. $H(x) = \int_0^x te^{t^2} dt$

Vérifier que $F' = \frac{1}{x}$, $G' = e^{-x}$, $H' = xe^{x^2}$.**Exercice 9 (★★★) : bornes variables**1. Pour $x > 0$, on pose $\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$. Calculer $\Phi(x)$ et en déduire que Φ est constante.2. Pour x réel, on pose $\Psi(x) = \int_0^{x^2} e^{-t} dt$. Exprimer $\Psi(x)$ puis calculer $\Psi'(x)$.**Exercice 10 (★★) : vrai ou faux****Justifier chaque réponse :**1. Si $\int_a^b f \geq 0$ ($a < b$), alors $f \geq 0$ sur $[a; b]$.2. Si f est continue, positive sur $[a; b]$ et si $\int_a^b f = 0$, alors f est nulle sur $[a; b]$.

3. $\int_a^b fg = \left(\int_a^b f \right) \left(\int_a^b g \right)$.

4. $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

5. $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$ ($a < b$).

6. $\int_0^1 x^2 dx \leq \int_0^1 x dx$.

Ce qui peut tomber au bac

- Le **calcul d'une intégrale** avec une primitive à reconnaître (exercices 1 et 2).
- Les **propriétés** : linéarité, Chasles, positivité, croissance (exercices 3, 4, 10).
- Un **encadrement** d'intégrale avec l'inégalité de la moyenne (exercices 4 et 6).
- Une **valeur moyenne** (exercice 5).
- Une **fonction définie par une intégrale** (exercices 8 et 9).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Que vaut $\int_0^1 x \, dx$?

- A. $\frac{1}{2}$
- B. 1
- C. 0
- D. 2

2. Que vaut $\int_0^\pi \sin x \, dx$?

- A. 2
- B. 0
- C. 1
- D. -2

3. Que vaut $\int_1^e \frac{1}{x} \, dx$?

- A. 0
- B. $e - 1$
- C. 1
- D. e

4. La relation de Chasles pour les intégrales s'écrit :

- A. $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$
- B. $\int_a^c f = \int_a^b f \times \int_b^c f$
- C. $\int_a^c f = \int_a^b f - \int_b^c f$
- D. $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_c^b f$

5. Que vaut $\int_0^2 3x^2 \, dx$?

- A. 8
- B. 4
- C. 6
- D. 12

6. Dans l'exercice 2, que vaut $\int_0^1 x (x^2 + 1)^3 dx$?

- A. 2
- B. $\frac{15}{8}$
- C. $\frac{1}{4}$
- D. $\frac{16}{8}$

7. Dans l'exercice 3, avec $\int_0^2 f = 3$ et $\int_2^5 f = 4$, que vaut $\int_0^5 f$?

- A. 12
- B. 7
- C. -1
- D. 1

8. Dans l'exercice 5, quelle est la valeur moyenne de $\sin$ sur $[0; \pi]$?

- A. $\frac{2}{\pi}$
- B. 0
- C. π
- D. 1

9. Dans l'exercice 7, pour f continue et impaire sur $[-a; a]$, que vaut $\int_{-a}^a f(x) dx$?

- A. 0
- B. $2 \int_0^a f$
- C. a^2
- D. Cela dépend de f

10. Dans l'exercice 9, on pose $\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$ pour $x > 0$. Que vaut $\Phi(x)$?

- A. $x \ln 2$
- B. $\ln x$
- C. $\ln 2$, une constante
- D. $2 \ln x$