

# Fiche 1 : calculer des intégrales et utiliser leurs propriétés

---

Dix exercices pour maîtriser :

- le calcul d'intégrales avec les primitives ;
- la linéarité et la relation de Chasles ;
- la positivité et la croissance ;
- les encadrements ;
- la valeur moyenne ;
- les fonctions paires et impaires ;
- les fonctions définies par une intégrale ;
- les vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- primitive écrite avec sa forme reconnue ;
- crochet  $\left[F(x)\right]$  avant de remplacer ;
- propriété citée ;
- conclusion.

## Le modèle de rédaction d'un calcul d'intégrale

« La fonction  $f : x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 1}$  est continue sur  $[0 ; 1]$ . Elle est de la forme  $\frac{u'}{u}$  avec  $u(x) = x^2 + 1 > 0$ . Donc  $F(x) = \ln(x^2 + 1)$  en est une primitive. Alors :

$$\int_0^1 f(x) dx = \left[ \ln(x^2 + 1) \right]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2. \text{ »}$$

- Justifie que la fonction est **continue** sur l'intervalle des bornes.
- Reconnais la forme, donne **une primitive**, écris le **crochet**, puis remplace.
- Pour un encadrement : **encadre la fonction**, cite la propriété, intègre.

### Les pièges classiques

- Oublier le crochet et écrire «  $F(x) = \dots$  » comme si c'était l'intégrale.
- Se tromper de signe dans  $F(b) - F(a)$  quand  $F(a)$  est négatif.
- Écrire  $\int fg = \left(\int f\right) \left(\int g\right)$ .
- Utiliser la croissance de l'intégrale avec les bornes dans le mauvais ordre.

Une intégrale sans crochet, c'est un compte rendu sans date : on comprend l'idée, mais on ne sait plus d'où ça vient.

### Exercice 1 (★) : intégrales avec les primitives usuelles

Calculer :

1.  $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) dx$

2.  $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

3.  $\int_0^1 e^{2x} dx$

4.  $\int_0^\pi \sin x dx$

5.  $\int_0^{\pi/2} \cos 2x dx$

6.  $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

### Correction de l'exercice 1

#### Méthode

Toutes ces fonctions sont continues sur l'intervalle des bornes. On utilise  $\int_a^b f = \left[F(x)\right]_a^b$ .

Question 1

Une primitive est  $x^3 - x^2 + x$ .

$$\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) dx = \left[x^3 - x^2 + x\right]_0^2 = (8 - 4 + 2) - 0$$

= 6

Question 2

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = \left[\ln x\right]_1^e = \ln e - \ln 1$$

$$= 1$$

Question 3

Une primitive de  $e^{2x}$  est  $\frac{e^{2x}}{2}$ .

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{2x} dx &= \left[ \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{e^2 - 1}{2}\end{aligned}$$

Question 4

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin x \, dx &= \left[ -\cos x \right]_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

Question 5

Une primitive de  $\cos 2x$  est  $\frac{\sin(2x)}{2}$ .

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos 2x \, dx &= \left[ \frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\sin \pi}{2} - 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Question 6

Une primitive de  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  est  $2\sqrt{x}$ .

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \left[ 2\sqrt{x} \right]_1^4 = 4 - 2 \\ &= 2\end{aligned}$$

**Exercice 2 (★★) : intégrales de fonctions composées****Calculer :**

1.  $\int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx$

2.  $\int_0^1 x e^{x^2} dx$

3.  $\int_0^1 x (x^2 + 1)^3 dx$

4.  $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx$

5.  $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

6.  $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

**Correction de l'exercice 2**

Question 1

Forme  $\frac{u'}{u}$  avec  $u(x) = x^2 + 1 > 0$ .

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \left[ \ln(x^2 + 1) \right]_0^1 = \ln 2 - \ln 1$$

$$= \ln 2$$

Question 2

 $x e^{x^2} = \frac{1}{2} u' e^u$  avec  $u(x) = x^2$ .

$$\int_0^1 x e^{x^2} dx = \left[ \frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1$$

$$= \frac{e - 1}{2}$$

Question 3

 $x (x^2 + 1)^3 = \frac{1}{2} u' u^3$  avec  $u(x) = x^2 + 1$ . Une primitive est  $\frac{1}{2} \times \frac{(x^2 + 1)^4}{4} = \frac{(x^2 + 1)^4}{8}$ .

$$\int_0^1 = \left[ \frac{(x^2 + 1)^4}{8} \right]_0^1 = \frac{16 - 1}{8}$$

$$= \frac{15}{8}$$

Question 4

 $\sin x \cos x = u' u$  avec  $u(x) = \sin x$ .

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx = \left[ \frac{1}{2} \sin^2 x \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} - 0$$

$$= \frac{1}{2}$$

Question 5

$\frac{\ln x}{x} = u'u$  avec  $u(x) = \ln x$ , sur  $[1; e]$ .

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx = \left[ \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} - 0$$

$$= \frac{1}{2}$$

Question 6

Forme  $\frac{u'}{u}$  avec  $u(x) = e^x + 1 > 0$ .

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx = \left[ \ln(e^x + 1) \right]_0^1 = \ln(e + 1) - \ln 2$$

$$= \ln \frac{e + 1}{2}$$

### Exercice 3 (★) : linéarité et relation de Chasles

Soient  $f$  et  $g$  continues sur  $[0; 5]$ . On sait que :

- $\int_0^2 f = 3$  ;
- $\int_2^5 f = 4$  ;
- $\int_0^2 g = -1$ .

Calculer :

1.  $\int_0^5 f$
2.  $\int_0^2 (2f - 3g)$
3.  $\int_5^2 f$
4.  $\int_0^2 (f + g)$

### Correction de l'exercice 3

## Question 1

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\int_0^5 f &= \int_0^2 f + \int_2^5 f = 3 + 4 \\ &= 7\end{aligned}$$

## Question 2

Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^2 (2f - 3g) &= 2 \int_0^2 f - 3 \int_0^2 g = 2 \times 3 - 3 \times (-1) = 6 + 3 \\ &= 9\end{aligned}$$

## Question 3

$$\begin{aligned}\text{En inversant les bornes : } \int_5^2 f &= - \int_2^5 f \\ &= -4\end{aligned}$$

## Question 4

$$\begin{aligned}\text{Par linéarité : } \int_0^2 (f + g) &= 3 + (-1) \\ &= 2\end{aligned}$$

**Exercice 4 (★★) : encadrer sans calculer**

1. Montrer que  $\int_0^1 e^{x^2} dx \geq 1$ .
2. Montrer que  $e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$ .
3. Montrer que  $\frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx \leq 1$ , puis vérifier avec le calcul exact.

**Correction de l'exercice 4**

## Question 1

Pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $x^2 \geq 0$ , donc  $e^{x^2} \geq e^0 = 1$ . Par croissance de l'intégrale (bornes  $0 \leq 1$ ) :

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2} dx &\geq \int_0^1 1 dx = 1 \\ \int_0^1 e^{x^2} dx &\geq 1\end{aligned}$$

## Question 2

Pour  $x \in [0; 1]$ ,  $0 \leq x^2 \leq 1$ . Donc  $-1 \leq -x^2 \leq 0$ . Donc  $e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq 1$ . D'après l'inégalité de la moyenne sur  $[0; 1]$  (longueur 1) :

$$e^{-1} \times 1 \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1 \times 1$$

$$e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$$

## Question 3

Pour  $x \in [1; 2]$ ,  $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$ . Sur  $[1; 2]$  (longueur 1) :

$$\frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx \leq 1$$

Vérification :  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2 \approx 0,693$ . Ce nombre appartient bien à  $[0,5; 1]$ .

## Exercice 5 (★★) : valeurs moyennes

Déterminer la valeur moyenne :

1. de  $x \mapsto x^2$  sur  $[0; 3]$

2. de  $\sin$  sur  $[0; \pi]$

3. de  $\exp$  sur  $[0; \ln 2]$

4. de  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $[1; e]$

## Correction de l'exercice 5

## Méthode

La valeur moyenne de  $f$  sur  $[a; b]$  est  $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ .

## Question 1

$$\mu = \frac{1}{3} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{1}{3} \times 9$$

$$\mu = 3$$

## Question 2

$$\mu = \frac{1}{\pi} \left[ -\cos x \right]_0^\pi = \frac{1}{\pi} \times 2$$

$$\mu = \frac{2}{\pi} \approx 0,64$$

Question 3

$$\mu = \frac{1}{\ln 2} \left[ e^x \right]_0^{\ln 2} = \frac{2-1}{\ln 2}$$

$$\mu = \frac{1}{\ln 2} \approx 1,44$$

Question 4

$$\mu = \frac{1}{e-1} \left[ \ln x \right]_1^e$$

$$\mu = \frac{1}{e-1} \approx 0,58$$

**Exercice 6 (★★) : l'inégalité de la moyenne**

Soit  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  sur  $[0; 1]$ . Encadrer  $f$ , puis encadrer  $\int_0^1 f(x) dx$ .

**Correction de l'exercice 6****Encadrement de  $f$** 

Pour  $x \in [0; 1]$ ,  $0 \leq x^2 \leq 1$ . Donc  $1 \leq 1+x^2 \leq 2$ . La fonction inverse est décroissante sur  $]0; +\infty[$ . Donc  $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ .

**Encadrement de l'intégrale**

D'après l'inégalité de la moyenne sur  $[0; 1]$  (longueur 1) :

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \leq 1$$

*Remarque :* la valeur exacte est  $\frac{\pi}{4} \approx 0,785$ . Elle est bien dans cet encadrement (on la calculera avec la fonction arctangente, hors programme).

**Exercice 7 (★★★) : fonctions paires et impaires**

1. Calculer  $\int_{-1}^1 x^3 dx$  et  $\int_{-1}^1 x^2 dx$ .

2. Soit  $f$  continue et impaire sur  $[-a; a]$ , et  $F$  une primitive de  $f$ . Montrer que  $F(-x) - F(x)$  est constante. En déduire que  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .

3. Soit  $f$  continue et paire sur  $[-a; a]$ , et  $F$  une primitive de  $f$ . Montrer que  $F(x) + F(-x)$  est constante. En déduire que  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ .

**Correction de l'exercice 7**

Question 1

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^3 dx &= \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ &= 0 \\ \int_{-1}^1 x^2 dx &= \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Question 2

Soit  $g(x) = F(-x) - F(x)$ , dérivable sur  $[-a; a]$ .  $g'(x) = -F'(-x) - F'(x) = -f(-x) - f(x)$ . Comme  $f$  est impaire,  $f(-x) = -f(x)$ . Donc  $g'(x) = f(x) - f(x) = 0$ .  $g$  est constante.

Comme  $g(0) = F(0) - F(0) = 0$ ,  $g$  est nulle. Donc  $F(-x) = F(x)$  pour tout  $x$ .

$$\int_{-a}^a f = F(a) - F(-a) = 0$$

Question 3

Soit  $h(x) = F(x) + F(-x)$ .  $h'(x) = F'(x) - F'(-x) = f(x) - f(-x) = 0$ , car  $f$  est paire.  $h$  est constante, égale à  $h(0) = 2F(0)$ . Donc  $F(-a) = 2F(0) - F(a)$ .

$$\text{Alors } \int_{-a}^a f = F(a) - F(-a) = 2F(a) - 2F(0).$$

$$\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$$

*Retenir :* l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique est nulle. Celle d'une fonction paire vaut le double de l'intégrale sur la moitié positive.

**Exercice 8 (★★) : fonctions définies par une intégrale**

Déterminer une expression simple de :

1.  $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$  pour  $x > 0$

2.  $G(x) = \int_0^x e^{-t} dt$

3.  $H(x) = \int_0^x te^{t^2} dt$

Vérifier que  $F' = \frac{1}{x}$ ,  $G' = e^{-x}$ ,  $H' = xe^{x^2}$ .**Correction de l'exercice 8**

Question 1

$$F(x) = \left[ \ln t \right]_1^x = \ln x - \ln 1$$

$$F(x) = \ln x$$

Et  $F'(x) = \frac{1}{x}$

Question 2

$$G(x) = \left[ -e^{-t} \right]_0^x = -e^{-x} + 1$$

$$G(x) = 1 - e^{-x}$$

Et  $G'(x) = e^{-x}$

Question 3

Une primitive de  $te^{t^2}$  est  $\frac{1}{2}e^{t^2}$ .  $H(x) = \left[ \frac{1}{2}e^{t^2} \right]_0^x$

$$H(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{2}$$

Et  $H'(x) = \frac{1}{2} \times 2xe^{x^2} = xe^{x^2}$

Dans les trois cas, on retrouve le théorème :  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est la primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$ .

**Exercice 9 (★★★) : bornes variables**

1. Pour  $x > 0$ , on pose  $\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$ . Calculer  $\Phi(x)$  et en déduire que  $\Phi$  est constante.
2. Pour  $x$  réel, on pose  $\Psi(x) = \int_0^{x^2} e^{-t} dt$ . Exprimer  $\Psi(x)$  puis calculer  $\Psi'(x)$ .

**Correction de l'exercice 9**

Question 1

$$\Phi(x) = \left[ \ln t \right]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln x = \ln 2 + \ln x - \ln x$$

$$\Phi(x) = \ln 2$$

La fonction  $\Phi$  est constante sur  $]0; +\infty[$ .

Question 2

$$\Psi(x) = \left[ -e^{-t} \right]_0^{x^2} = -e^{-x^2} + 1$$

$$\Psi(x) = 1 - e^{-x^2}$$

Cette fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}$  :

$$\Psi'(x) = 2xe^{-x^2}$$

On retrouve la dérivation d'une composée : si  $G(y) = \int_0^y e^{-t} dt$ , alors  $\Psi(x) = G(x^2)$ . Donc

$$\Psi'(x) = 2x \times G'(x^2) = 2xe^{-x^2}.$$

**Exercice 10 (★★) : vrai ou faux****Justifier chaque réponse :**

1. Si  $\int_a^b f \geq 0$  ( $a < b$ ), alors  $f \geq 0$  sur  $[a; b]$ .
2. Si  $f$  est continue, positive sur  $[a; b]$  et si  $\int_a^b f = 0$ , alors  $f$  est nulle sur  $[a; b]$ .
3.  $\int_a^b fg = \left( \int_a^b f \right) \left( \int_a^b g \right)$ .
4.  $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ .
5.  $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$  ( $a < b$ ).
6.  $\int_0^1 x^2 dx \leq \int_0^1 x dx$ .

**Correction de l'exercice 10**

Affirmation 1

Contre-exemple :  $f(x) = x - \frac{1}{2}$  sur  $[0; 1]$ .  $\int_0^1 f = 0 \geq 0$ , mais  $f(0) = -\frac{1}{2} < 0$ .**Faux.**

Affirmation 2

C'est une propriété de l'intégrale d'une fonction continue et positive.

**Vrai.**

Affirmation 3

Contre-exemple :  $f = g = 1$  sur  $[0; 2]$ .  $\int fg = 2$  et  $(\int f)(\int g) = 2 \times 2 = 4$ .**Faux.**

Affirmation 4

C'est la linéarité de l'intégrale.

**Vrai.**

Affirmation 5

On a  $-|f| \leq f \leq |f|$ . Donc  $-\int |f| \leq \int f \leq \int |f|$  par croissance de l'intégrale.**Vrai.**

Affirmation 6

Sur  $[0; 1]$ ,  $x^2 \leq x$ . Par croissance de l'intégrale :  $\int_0^1 x^2 dx \leq \int_0^1 x dx$ , c'est-à-dire  $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2}$ .

**Vrai.**

### Ce qui peut tomber au bac

- Le **calcul d'une intégrale** avec une primitive à reconnaître (exercices 1 et 2).
- Les **propriétés** : linéarité, Chasles, positivité, croissance (exercices 3, 4, 10).
- Un **encadrement** d'intégrale avec l'inégalité de la moyenne (exercices 4 et 6).
- Une **valeur moyenne** (exercice 5).
- Une **fonction définie par une intégrale** (exercices 8 et 9).

## QCM : une seule bonne réponse par question

1. Que vaut  $\int_0^1 x dx$  ?

- A.  $\frac{1}{2}$  (bonne réponse)
- B. 1
- C. 0
- D. 2

*Justification* :  $\left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$ .

2. Que vaut  $\int_0^\pi \sin x dx$  ?

- A. 2 (bonne réponse)
- B. 0
- C. 1
- D. -2

*Justification* :  $[-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$ .

3. Que vaut  $\int_1^e \frac{1}{x} dx$  ?

- A. 0
- B.  $e - 1$
- C. 1 (bonne réponse)
- D.  $e$

*Justification* :  $[\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$ .

4. La relation de Chasles pour les intégrales s'écrit :

A.  $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$  (**bonne réponse**)

B.  $\int_a^c f = \int_a^b f \times \int_b^c f$

C.  $\int_a^c f = \int_a^b f - \int_b^c f$

D.  $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_c^b f$

*Justification* : On peut découper l'intervalle d'intégration en deux.

5. Que vaut  $\int_0^2 3x^2 dx$  ?

A. 8 (**bonne réponse**)

B. 4

C. 6

D. 12

*Justification* :  $[x^3]_0^2 = 8$ .

6. Dans l'exercice 2, que vaut  $\int_0^1 x(x^2 + 1)^3 dx$  ?

A. 2

B.  $\frac{15}{8}$  (**bonne réponse**)

C.  $\frac{1}{4}$

D.  $\frac{16}{8}$

*Justification* : Avec  $u = x^2 + 1$ ,  $u' = 2x$  :  $\int_0^1 x(x^2 + 1)^3 dx = \left[ \frac{(x^2 + 1)^4}{8} \right]_0^1 = \frac{16 - 1}{8} = \frac{15}{8}$ .

7. Dans l'exercice 3, avec  $\int_0^2 f = 3$  et  $\int_2^5 f = 4$ , que vaut  $\int_0^5 f$  ?

A. 12

B. 7 (**bonne réponse**)

C. -1

D. 1

*Justification* : Relation de Chasles :  $\int_0^5 f = \int_0^2 f + \int_2^5 f = 3 + 4 = 7$ .

8. Dans l'exercice 5, quelle est la valeur moyenne de  $\sin$  sur  $[0; \pi]$  ?

A.  $\frac{2}{\pi}$  (**bonne réponse**)

- B. 0
- C.  $\pi$
- D. 1

*Justification* :  $\mu = \frac{1}{\pi - 0} \int_0^\pi \sin x \, dx = \frac{1}{\pi} \times 2 = \frac{2}{\pi}.$

9. Dans l'exercice 7, pour  $f$  continue et impaire sur  $[-a; a]$ , que vaut  $\int_{-a}^a f(x) \, dx$  ?

- A. 0 (**bonne réponse**)
- B.  $2 \int_0^a f$
- C.  $a^2$
- D. Cela dépend de  $f$

*Justification* : Pour une fonction impaire,  $F(-x) - F(x)$  est constante et vaut 0 en particulier : l'intégrale sur un intervalle symétrique est nulle.

10. Dans l'exercice 9, on pose  $\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t} \, dt$  pour  $x > 0$ . Que vaut  $\Phi(x)$  ?

- A.  $x \ln 2$
- B.  $\ln x$
- C.  $\ln 2$ , **une constante (bonne réponse)**
- D.  $2 \ln x$

*Justification* :  $\Phi(x) = [\ln t]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln x = \ln 2$ , indépendant de  $x$ .