

Contrôle : chapitre 8, Calcul intégral

Durée : 60 minutes. **Calculatrice :** autorisée. **Barème :** 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6 points) : Calculs d'intégrales et propriétés

1. Calculer $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+3} dx$. Donner la valeur exacte sous la forme d'un seul logarithme. (2 points)
2. Calculer $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$. (1,5 points)
3. Soient f et g deux fonctions continues sur $[0; 6]$ telles que $\int_0^3 f(x) dx = 5$, $\int_3^6 f(x) dx = -2$ et $\int_0^6 g(x) dx = 4$. Calculer, en nommant les propriétés utilisées : $\int_0^6 f(x) dx$, puis $\int_0^6 (2f(x) - 3g(x)) dx$, puis la valeur moyenne de f sur $[0; 6]$. (2,5 points)

Exercice 2 (7 points) : Intégration par parties et aire

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)e^x$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal dans lequel 1 unité d'abscisse représente 2 cm et 1 unité d'ordonnée représente 1,5 cm. On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x - 2$.

1. Justifier que f est négative ou nulle sur $[0; 2]$. (1 point)
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \int_0^2 (x-2)e^x dx$. (2 points)
3. Déterminer l'aire $\mathcal{A}_1$ du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$, en unités d'aire, puis en cm^2 (valeur exacte puis arrondi au centième). (1 point)
4. Montrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$ se coupent aux points d'abscisses 0 et 2 et déterminer leur position relative sur $[0; 2]$. En déduire l'aire $\mathcal{A}_2$, en unités d'aire, du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$ sur $[0; 2]$. (3 points)

Exercice 3 (7 points) : Une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

On donne le début d'un programme Python (les pointillés sont à compléter) :

```
from math import e

def I(n):
    v = .....
    for k in range(n):
        v = .....
    return v
```

1. Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante. En déduire qu'elle converge. (1,5 points)
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier naturel n : $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$. (1,5 points)
3. Calculer I_0 , puis en déduire les valeurs exactes de I_1 et I_2 . (1 point)
4. Montrer que, pour tout entier naturel n , $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$. En déduire la limite de (I_n) . (1,5 points)
5. On souhaite calculer I_n avec Python. Compléter la fonction **I** donnée dans l'introduction de l'exercice pour qu'elle renvoie la valeur approchée de I_n à l'aide de la relation de la question 2. Que renvoie alors **I(3)** ? Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près. (1,5 points)