

Contrôle : chapitre 8, Calcul intégral

Durée : 60 minutes. **Calculatrice :** autorisée. **Barème :** 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6 points) : Calculs d'intégrales et propriétés

1. Calculer $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+3} dx$. Donner la valeur exacte sous la forme d'un seul logarithme. (2 points)
2. Calculer $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$. (1,5 points)
3. Soient f et g deux fonctions continues sur $[0; 6]$ telles que $\int_0^3 f(x) dx = 5$, $\int_3^6 f(x) dx = -2$ et $\int_0^6 g(x) dx = 4$. Calculer, en nommant les propriétés utilisées : $\int_0^6 f(x) dx$, puis $\int_0^6 (2f(x) - 3g(x)) dx$, puis la valeur moyenne de f sur $[0; 6]$. (2,5 points)

Correction de l'exercice 1, question 1

Question 1 (2 points)

La fonction $x \mapsto \frac{2x}{x^2+3}$ est continue sur $[0; 1]$. Elle est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 3 > 0$.

Une primitive est donc $F(x) = \ln(x^2 + 3)$.

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+3} dx = \left[\ln(x^2 + 3) \right]_0^1 = \ln 4 - \ln 3.$$

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+3} dx = \ln\left(\frac{4}{3}\right) (\approx 0,288).$$

Barème : 0,5 point pour la forme $\frac{u'}{u}$ et $u > 0$; 0,5 point pour la primitive $\ln(x^2 + 3)$; 1 point pour le calcul avec le crochet et la valeur exacte.

Correction de l'exercice 1, question 2

Question 2 (1,5 points)

On remarque que $\sin x \cos^2 x = -u'(x) u(x)^2$ avec $u(x) = \cos x$; une primitive est donc $F(x) = -\frac{\cos^3 x}{3}$.

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x \, dx = \left[-\frac{\cos^3 x}{3} \right]_0^{\pi/2} = 0 - \left(-\frac{1}{3} \right).$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{3}.$$

Barème : 0,5 point pour la reconnaissance de la forme $u'u^2$; 0,5 point pour la primitive ; 0,5 point pour le calcul du crochet.

Correction de l'exercice 1, question 3

Question 3 (2,5 points)

D'après la relation de Chasles : $\int_0^6 f = \int_0^3 f + \int_3^6 f = 5 + (-2) = 3$.

Par linéarité de l'intégrale : $\int_0^6 (2f - 3g) = 2 \int_0^6 f - 3 \int_0^6 g = 2 \times 3 - 3 \times 4 = -6$.

La valeur moyenne de f sur $[0; 6]$ est $\mu = \frac{1}{6-0} \int_0^6 f(x) \, dx = \frac{3}{6}$.

$$\int_0^6 f = 3 ; \int_0^6 (2f - 3g) = -6 ; \mu = \frac{1}{2}.$$

Barème : 1 point pour Chasles citée et $\int_0^6 f = 3$; 1 point pour linéarité citée et -6 ; 0,5 point pour valeur moyenne avec le facteur $\frac{1}{b-a}$.

Exercice 2 (7 points) : Intégration par parties et aire

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 2)e^x$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal dans lequel 1 unité d'abscisse représente 2 cm et 1 unité d'ordonnée représente 1,5 cm. On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x - 2$.

1. Justifier que f est négative ou nulle sur $[0; 2]$. (1 point)
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \int_0^2 (x - 2)e^x dx$. (2 points)
3. Déterminer l'aire $\mathcal{A}_1$ du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$, en unités d'aire, puis en cm^2 (valeur exacte puis arrondi au centième). (1 point)
4. Montrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$ se coupent aux points d'abscisses 0 et 2 et déterminer leur position relative sur $[0; 2]$. En déduire l'aire $\mathcal{A}_2$, en unités d'aire, du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$ sur $[0; 2]$. (3 points)

Correction de l'exercice 2, question 1

Question 1 (1 point)

Pour tout réel x , $e^x > 0$. Pour $x \in [0; 2]$, $x - 2 \leq 0$.

Par produit, $f(x) = (x - 2)e^x \leq 0$ sur $[0; 2]$ (avec égalité seulement en $x = 2$).

Barème : 0,5 point pour $e^x > 0$; 0,5 point pour le signe de $x - 2$ et la conclusion.

Correction de l'exercice 2, question 2

Question 2 (2 points)

On pose $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x - 2$. Alors $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées continues : l'intégration par parties s'applique.

$$I = \left[(x - 2)e^x \right]_0^2 - \int_0^2 e^x dx = (0 - (-2)) - \left[e^x \right]_0^2 = 2 - (e^2 - 1).$$

$$I = 3 - e^2.$$

Barème : 0,5 point pour le choix de u' , v et la vérification des hypothèses ; 0,5 point pour la formule avec le crochet ; 1 point pour le calcul des deux termes et le résultat.

Correction de l'exercice 2, question 3

Question 3 (1 point)

f est continue et négative sur $[0; 2]$, donc $\mathcal{A}_1 = - \int_0^2 f(x) \, dx = -I = e^2 - 3 \text{ u.a.}$

Une unité d'aire vaut $2 \times 1,5 = 3 \text{ cm}^2$.

$$\mathcal{A}_1 = 3 (e^2 - 3) \text{ cm}^2 \approx 13,17 \text{ cm}^2.$$

Barème : 0,5 point pour le signe moins justifié et $e^2 - 3 \text{ u.a.}$; 0,5 point pour la conversion en cm^2 .

Correction de l'exercice 2, question 4

Question 4 (3 points)

$f(x) - (x - 2) = (x - 2)(e^x - 1)$. Cette différence s'annule si et seulement si $x = 2$ ou $e^x = 1$, c'est-à-dire $x = 2$ ou $x = 0$.

Pour $x \in]0; 2[$: $x - 2 < 0$ et $e^x - 1 > 0$, donc $f(x) - (x - 2) < 0$: sur $[0; 2]$, $\mathcal{C}_f$ est **en dessous** de $\mathcal{D}$.

$$\mathcal{A}_2 = \int_0^2 ((x - 2) - f(x)) \, dx = \int_0^2 (x - 2) \, dx - I.$$

$$\text{Or } \int_0^2 (x - 2) \, dx = \left[\frac{(x - 2)^2}{2} \right]_0^2 = 0 - 2 = -2.$$

$$\mathcal{A}_2 = -2 - (3 - e^2) = e^2 - 5 \text{ u.a. } (\approx 2,39).$$

Barème : 1 point pour la factorisation et les abscisses 0 et 2 ; 1 point pour la position relative justifiée et l'intégrale de « haut moins bas » ; 1 point pour le calcul et le résultat en u.a..

Exercice 3 (7 points) : Une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

On donne le début d'un programme Python (les pointillés sont à compléter) :

```
from math import e

def I(n):
    v = .....
    for k in range(n):
        v = .....
    return v
```

1. Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante. En déduire qu'elle converge. (1,5 points)
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier naturel n : $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$. (1,5 points)
3. Calculer I_0 , puis en déduire les valeurs exactes de I_1 et I_2 . (1 point)
4. Montrer que, pour tout entier naturel n , $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$. En déduire la limite de (I_n) . (1,5 points)
5. On souhaite calculer I_n avec Python. Compléter la fonction **I** donnée dans l'introduction de l'exercice pour qu'elle renvoie la valeur approchée de I_n à l'aide de la relation de la question 2. Que renvoie alors **I(3)** ? Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près. (1,5 points)

Correction de l'exercice 3, question 1

Question 1 (1,5 points)

Pour tout $x \in [0; 1]$: $x^n e^x \geq 0$. Comme $0 \leq 1$, la positivité de l'intégrale donne $I_n \geq 0$.

Pour tout $x \in [0; 1]$: $x^{n+1} \leq x^n$ (car $0 \leq x \leq 1$), donc, en multipliant par $e^x > 0$: $x^{n+1}e^x \leq x^n e^x$. Par croissance de l'intégrale : $I_{n+1} \leq I_n$.

La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 : elle **converge**.

Barème : 0,5 point pour la positivité ; 0,5 point pour la décroissance justifiée par la croissance de l'intégrale ; 0,5 point pour le théorème de convergence monotone.

Correction de l'exercice 3, question 2

Question 2 (1,5 points)

On pose $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x^{n+1}$. Alors $u(x) = e^x$ et $v'(x) = (n+1)x^n$; ces fonctions sont dérivables sur $[0; 1]$, de dérivées continues.

$$I_{n+1} = \left[x^{n+1} e^x \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1) x^n e^x dx = e - 0 - (n+1) I_n.$$

Donc $I_{n+1} = e - (n+1) I_n$.

Barème : 0,5 point pour le choix de u' et v ; 0,5 point pour le crochet ; 0,5 point pour l'intégrale restante reconnue comme $(n+1) I_n$.

Correction de l'exercice 3, question 3

Question 3 (1 point)

$$I_0 = \int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

Avec $n = 0$: $I_1 = e - 1 \times I_0 = e - (e - 1) = 1$. Avec $n = 1$: $I_2 = e - 2I_1 = e - 2$.

$I_0 = e - 1$, $I_1 = 1$, $I_2 = e - 2$.

Barème : 0,5 point pour I_0 ; 0,5 point pour I_1 et I_2 par la relation de récurrence.

Correction de l'exercice 3, question 4

Question 4 (1,5 points)

Pour $x \in [0; 1]$: $e^x \leq e$, donc $x^n e^x \leq e x^n$. Par croissance de l'intégrale : $I_n \leq e \int_0^1 x^n dx = e \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{e}{n+1}$.

Avec $I_n \geq 0$ (question 1) : $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$. D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

Barème : 0,5 point pour $e^x \leq e$ et la croissance de l'intégrale ; 0,5 point pour le calcul de $\int_0^1 x^n$ et l'encadrement ; 0,5 point pour le théorème des gendarmes cité.

Correction de l'exercice 3, question 5

Question 5 (1,5 points)

```

from math import e

def I(n):
    v = e - 1
    for k in range(n):
        v = e - (k + 1) * v
    return v

```

On initialise avec $I_0 = e - 1$. À l'étape k de la boucle, v vaut I_k et la relation avec $n = k$ donne $I_{k+1} = e - (k + 1)I_k$.

$I(3)$ renvoie $I_3 = e - 3I_2 = e - 3(e - 2)$.

$I_3 = 6 - 2e \approx 0,563$.

Barème : 0,5 point pour l'initialisation $e - 1$; 0,5 point pour la ligne de mise à jour dans la boucle ; 0,5 point pour $I_3 = 6 - 2e \approx 0,563$.

Récapitulatif du barème

Exercice	Points
Exercice 1	6
Exercice 2	7
Exercice 3	7
Total	20