

Calcul intégral : le cours

L'**intégrale** d'une fonction mesure l'**aire sous sa courbe**. Grâce aux primitives, elle se calcule simplement : c'est le grand pont entre la dérivation et les aires.

Elle sert à :

- calculer des aires ;
- calculer des valeurs moyennes ;
- encadrer des quantités ;
- étudier des suites définies par des intégrales.

Dans tout le cours, tu verras des astuces , des pièges et un peu d'humour .

Comment utiliser ce cours

- Lis une partie, puis fais tout de suite la fiche correspondante.
- Apprends la **formule de l'intégration par parties** et les **propriétés** (partie 3) : ce sont les deux piliers du chapitre.
- Avant de calculer une aire, **regarde le signe de la fonction** : c'est le piège le plus fréquent.

1. L'intégrale d'une fonction continue

Soit f continue sur un intervalle I . Soit F une primitive de f sur I . Soient a et b deux réels de I . On appelle **intégrale de a à b de f** le nombre :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \left[F(x) \right]_a^b$$

- Ce nombre ne dépend **pas de la primitive choisie**. Deux primitives diffèrent d'une constante, qui disparaît dans $F(b) - F(a)$.
- La variable est **muette** : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.
- L'intégrale de a à a vaut 0.
- **Échanger les bornes change le signe** : $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$.

Exemple.

$$\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) dx = \left[x^3 - x^2 + x \right]_0^2 = (8 - 4 + 2) - 0 = 6$$

2. L'interprétation géométrique : l'aire

Si f est continue et **positive** sur $[a; b]$ ($a \leq b$), l'intégrale $\int_a^b f$ est l'**aire** du domaine compris entre :

- la courbe de f ;
- l'axe des abscisses ;
- les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Cette aire est exprimée en **unités d'aire (u.a.)**. Une **unité d'aire** est l'aire du rectangle construit sur les vecteurs unités du repère.

Pièges :

- L'intégrale est un **nombre** qui peut être négatif ou nul. Une aire est toujours positive.
- Une aire s'exprime en **unités d'aire**. Pour la convertir, on multiplie par l'aire de l'unité. Par exemple, avec 2 cm en abscisse et 3 cm en ordonnée : 1 u.a. = 6 cm².
- Si f change de signe, $\int_a^b f$ **n'est pas** l'aire.

L'intégrale, c'est l'aire « avec le signe » : au-dessus de l'axe, elle est généreuse ; en dessous, elle rembourse.

3. Les propriétés de l'intégrale

Linéarité :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Relation de Chasles : pour a, b, c dans I :

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

Positivité : si $a \leq b$ et $f \geq 0$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f \geq 0$.

Croissance : si $a \leq b$ et $f \leq g$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Inégalité de la moyenne : si $m \leq f \leq M$ sur $[a; b]$, alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

Valeur absolue :

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \quad (a \leq b)$$

Fonction positive d'intégrale nulle : si f est continue, positive sur $[a; b]$ et si $\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$ sur $[a; b]$.

Astuce : pour encadrer une intégrale sans la calculer, **encadre la fonction** puis intègre l'encadrement. Par exemple, sur $[0; 1]$: $e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq 1$, donc :

$$e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$$

Pièges :

- Les inégalités ne se conservent que si les bornes sont dans l'ordre ($a \leq b$).
- $\int fg$ n'est **pas** $(\int f)(\int g)$.

4. La valeur moyenne

Soit f continue sur $[a; b]$, avec $a < b$. La **valeur moyenne** de f sur $[a; b]$ est le nombre :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

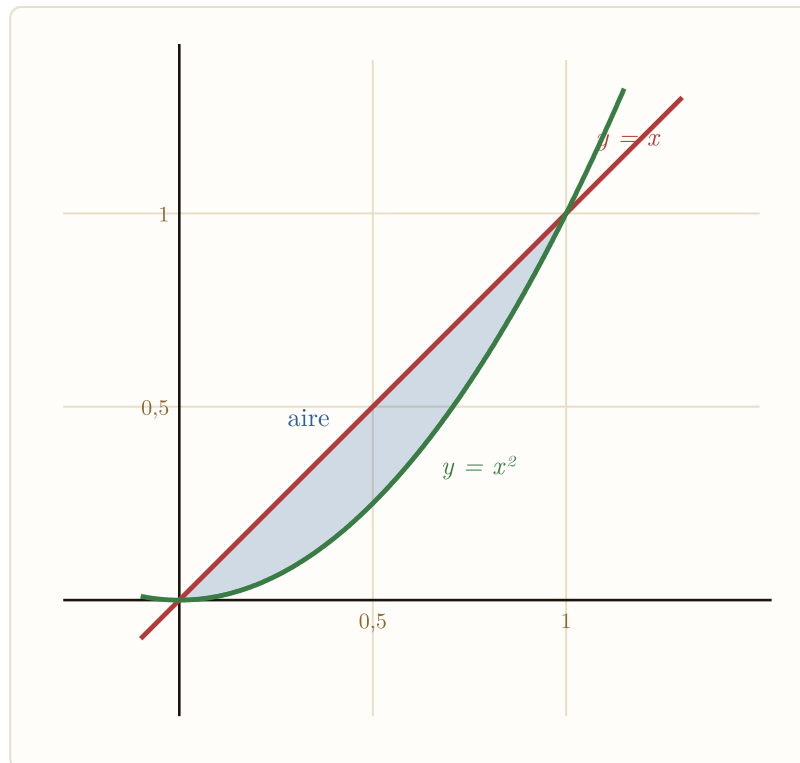
Interprétation : c'est la hauteur du rectangle de base $[a; b]$ qui a la même aire que le domaine sous la courbe. Si $m \leq f \leq M$, alors $m \leq \mu \leq M$.

Exemple. Valeur moyenne de $x \mapsto x^2$ sur $[0; 3]$:

$$\frac{1}{3} \times \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{1}{3} \times 9 = 3$$

5. Calculer des aires

Fonction positive : $A = \int_a^b f$.



Aire entre deux courbes : on intègre « haut – bas », ici $x - x^2$ sur $[0 ; 1]$

Fonction de signe variable : $A = \int_a^b |f|$.

- On étudie le signe de f .
- On **découpe l'intervalle** aux points où f change de signe.
- On met un signe moins sur les parties négatives (Chasles).

Aire entre deux courbes : si $f \geq g$ sur $[a ; b]$, l'aire du domaine compris entre les deux courbes est :

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Méthode pour l'aire entre deux courbes :

1. Trouve les abscisses des points d'intersection : $f(x) = g(x)$.
2. Étudie la position relative pour savoir qui est au-dessus (signe de $f - g$).
3. Calcule $\int$ (haut – bas).
4. Conclut avec l'unité d'aire, puis convertit si l'énoncé le demande.

6. L'intégration par parties

Théorème. Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle contenant a et b . Leurs dérivées u' et v' sont continues. Alors :

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx = \left[u(x) v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx$$

D'où vient la formule ? $(uv)' = u'v + uv'$, donc $u'v = (uv)' - uv'$. On intègre de a à b .

Comment choisir ?

- On pose v = la partie qui **se simplifie en dérivant** (un polynôme, $\ln x$).
- On pose u' = la partie dont on connaît une primitive (e^x , $\cos$, $\sin$).

Exemple. Calculer $\int_0^1 x e^x dx$.

On pose $u'(x) = e^x$, donc $u(x) = e^x$. On pose $v(x) = x$, donc $v'(x) = 1$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 .

$$\int_0^1 x e^x dx = \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1$$

Astuces :

- **Pour $\ln x$:** pose $u' = 1$ (donc $u = x$) et $v = \ln x$ (donc $v' = \frac{1}{x}$).
- **Pour $x^2 e^x$:** deux intégrations par parties de suite, en baissant la puissance de x .
- **Pour $e^x \cos x$:** deux intégrations par parties font revenir l'intégrale de départ. On résout alors une équation d'inconnue I .

Pièges :

- Oublier le crochet $\left[uv \right]_a^b$.
- Se tromper de signe devant la nouvelle intégrale.
- Si la nouvelle intégrale est plus compliquée, tu as inversé u' et v .

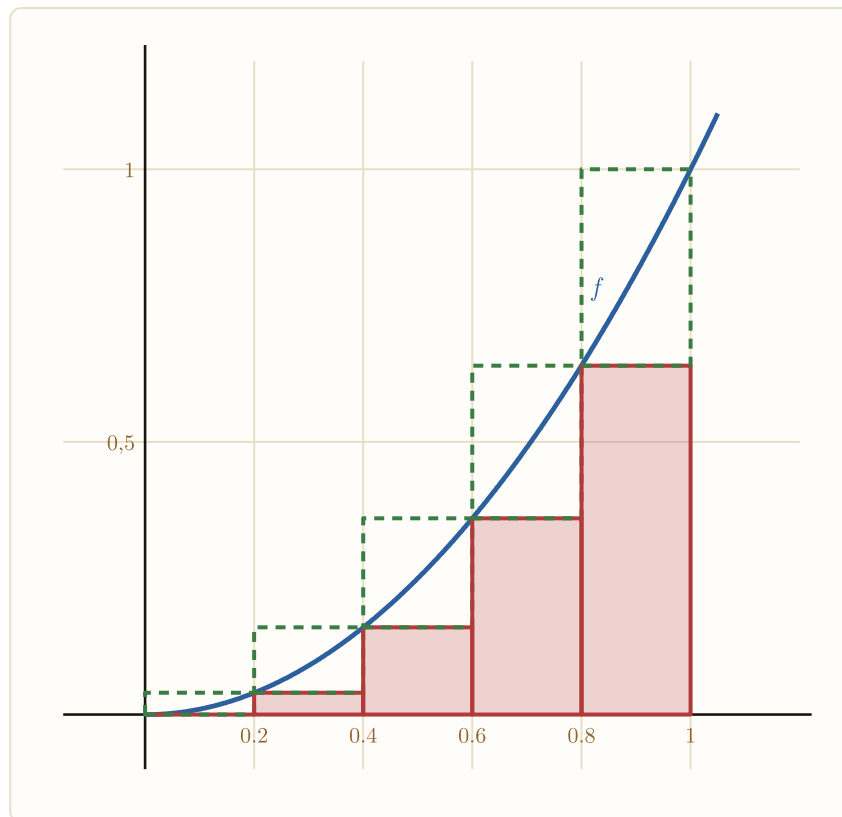
7. Les fonctions définies par une intégrale

Soit f continue sur I et $a \in I$. La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la **primitive de f sur I qui s'annule en a** . En particulier, $F' = f$.

Cela permet d'étudier les variations de F à partir du signe de f , même quand on ne sait pas calculer F .

8. La méthode des rectangles et Python

On partage $[a; b]$ en n intervalles de longueur $h = \frac{b-a}{n}$. Les **sommes de rectangles** approchent l'intégrale :



Méthode des rectangles pour x^2 sur $[0; 1]$: en rouge la somme à gauche, en pointillés vert le complément jusqu'à la somme à droite

- à gauche : $S_g = h[f(a) + f(a+h) + \dots + f(b-h)]$;
- à droite : $S_d = h[f(a+h) + \dots + f(b)]$.

Si f est **croissante** et positive sur $[a; b]$:

$$S_g \leq \int_a^b f \leq S_d$$

Si elle est décroissante, c'est l'inverse. L'écart $S_d - S_g = h[f(b) - f(a)]$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

```
def rectangles(f, a, b, n):
    h = (b - a)/n
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + f(a + k*h)
    return h*s
```

Cette fonction renvoie la somme à gauche. Pour la somme à droite, remplace $f(a + k*h)$ par $f(a + (k + 1)*h)$.

9. Les suites d'intégrales

1. **Calcule les premiers termes** (I_0, I_1) directement.
2. **Relation de récurrence** entre I_{n+1} et I_n . Souvent obtenue par une **intégration par parties**, ou entre $I_{n+1} + I_n$.
3. **Monotonie** : compare les fonctions dans les intégrales. $I_{n+1} - I_n = \int (f_{n+1} - f_n)$. Puis utilise la croissance de l'intégrale.
4. **Positivité et encadrement** pour conclure à la convergence. Puis à la limite (gendarmes).

10. Les 10 pépites du chapitre

1. **Crochet d'abord** : écris toujours $\left[F(x)\right]_a^b$ avant de remplacer.
2. **Étudie le signe** de f avant de parler d'aire.
3. **Aire entre deux courbes** : « haut – bas », intersections d'abord.
4. **IPP** : v se simplifie en dérivant, u' a une primitive facile.
5. **Pour $\ln x$ en IPP** : $u' = 1$ et $v = \ln x$.
6. **Vérifie** ton intégrale : le signe et l'ordre de grandeur doivent être cohérents avec la courbe.
7. **Encadre la fonction** pour encadrer l'intégrale.
8. **Valeur moyenne** : n'oublie pas le facteur $\frac{1}{b-a}$.
9. Une fonction **définie par une intégrale** se dérive : $F' = f$.
10. **Unité d'aire** : convertis en cm^2 quand l'énoncé le demande.

Complément du programme : pourquoi $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Dans le programme, l'intégrale d'une fonction continue **positive** est d'abord une **aire** (en unités d'aire). On démontre ensuite le lien avec les primitives.

Propriété. Soit f continue, positive et **croissante** sur $[a; b]$. La fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f .

Démonstration. Pour $h > 0$, $F(x+h) - F(x)$ est l'aire sous la courbe entre x et $x+h$. Cette aire est comprise entre celle de deux rectangles de largeur h :

$$h f(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq h f(x+h)$$

On divise par $h > 0$: $f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$.

Quand $h \rightarrow 0$, $f(x+h) \rightarrow f(x)$ (continuité). Le théorème des gendarmes donne $F'(x) = f(x)$. $\square$

Conséquence. Si G est une primitive quelconque de f , alors $G = F + C$ (deux primitives différent d'une constante) et

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$$

car $F(a) = \int_a^a f = 0$ et $G(b) - G(a) = F(b) + C - F(a) - C$. $\square$

Complément du programme : méthodes numériques

Pour $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$, on découpe $[0; 1]$ en n intervalles de largeur $\frac{1}{n}$.

- **Méthode des milieux** : on prend la valeur de f au milieu de chaque intervalle.
- **Méthode des trapèzes** : on relie les points par des segments, chaque morceau est un trapèze.
- **Méthode de Monte-Carlo** : on tire des points au hasard dans le carré $[0; 1]^2$ et on compte la proportion de ceux qui sont sous la courbe.

```
n = 10
milieux = sum(((i + 0.5) / n) ** 2 for i in range(n)) / n
trapezes = 0
for i in range(n):
    trapezes = trapezes + ((i / n) ** 2 + ((i + 1) / n) ** 2) / (2 * n)
print(round(milieux, 4))    # affiche 0.3325
print(round(trapezes, 4))   # affiche 0.335
```

La valeur exacte est 0,3333... : la méthode des milieux **sous-estime** de 0,0008 et celle des trapèzes **surestime** de 0,0017.

```
from random import random

N = 100000
dedans = 0
for _ in range(N):
    x, y = random(), random()
    if y <= x ** 2:
        dedans = dedans + 1
print(dedans / N)    # proche de 0.333
```

11. Ce qui peut tomber au bac

- Le **calcul d'intégrales**, les propriétés et les encadrements (fiche 1).
- Le **calcul d'aires** sous une courbe ou entre deux courbes (fiche 2).
- L'**intégration par parties** (fiche 3).
- Les **valeurs moyennes**, les **suites d'intégrales** et la **méthode des rectangles** avec Python (fiche 4).

Tu as maintenant le cours. Passe aux quatre fiches, aux exercices type bac, puis au Guide de rédaction du chapitre.