

Calcul intégral : exercices type bac

Trois exercices complets, dans le style de l'épreuve du bac :

- une fonction, l'aire sous sa courbe avec primitive, limite et équation à solution unique ;
- une suite d'intégrales avec intégration par parties, monotonie, limite et Python ;
- l'aire entre une courbe et sa tangente avec encadrement par la méthode des rectangles.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie de bac :

- primitive vérifiée ;
- crochet ;
- position relative justifiée ;
- régularité citée pour l'IPP ;
- théorèmes nommés ;
- conclusion en unités d'aire.

Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 30 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme le jour du bac.
- Pour une aire, écris toujours : position relative, formule, primitive, crochet, résultat en u.a.
- Pour une suite d'intégrales, suis le plan : premiers termes, récurrence, positivité, monotonie, limite.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : une aire sous la courbe d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (x+2)e^{-x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement.
2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
3. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = -(x+3)e^{-x}$ est une primitive de f sur $[0; +\infty[$.
4. Pour $a \geq 0$, on note $A(a)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$. Exprimer $A(a)$ en fonction de a , puis calculer $A(1)$ en u.a. et en cm^2 .
5. Déterminer la limite de $A(a)$ quand $a \rightarrow +\infty$ et l'interpréter.
6. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $A(\alpha) = 2,5$. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.
7. Déterminer la valeur moyenne de f sur $[0; 1]$.

Correction de la question 1

Pour $x \geq 0$: $f(x) = xe^{-x} + 2e^{-x}$. Par croissances comparées, $xe^{-x} \rightarrow 0$. Et $e^{-x} \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

La droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

Correction de la question 2

f est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme produit. $f'(x) = e^{-x} - (x+2)e^{-x} = (1-x-2)e^{-x}$.

$$f'(x) = -(x+1)e^{-x}$$

Pour $x \geq 0$, $x+1 > 0$ et $e^{-x} > 0$. Donc $f'(x) < 0$.

f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, de $f(0) = 2$ vers la limite 0.

Tableau : $f(0) = 2$; f décroît ; limite 0 en $+\infty$.

Correction de la question 3

F est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme produit. $F'(x) = -e^{-x} + (x+3)e^{-x} = (x+2)e^{-x} = f(x)$

.

F est une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

Correction de la question 4

f est continue et positive sur $[0; a]$ (produit de facteurs positifs). Donc :

$$A(a) = \int_0^a f(x) dx = \left[F(x) \right]_0^a = F(a) - F(0) = -(a+3)e^{-a} + 3$$

$$A(a) = 3 - (a+3)e^{-a} \text{ u.a.}$$

Pour $a = 1$:

$$A(1) = 3 - 4e^{-1} \approx 1,53 \text{ u.a.}$$

Une unité d'aire est l'aire d'un carré de 2 cm de côté, soit 4 cm². $1,53 \times 4$

$$A(1) \approx 6,1 \text{ cm}^2$$

Correction de la question 5

$(a+3)e^{-a} = ae^{-a} + 3e^{-a} \rightarrow 0$ quand $a \rightarrow +\infty$ (croissances comparées).

$$\lim A(a) = 3$$

Interprétation : le domaine infiniment long compris entre $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses pour $x \geq 0$ a une aire finie, égale à 3 u.a.

Correction de la question 6

A est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $A' = f$ (A est la primitive de f qui s'annule en 0). Comme $f > 0$, A est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$. $A(0) = 0$ et $\lim A = 3$.

Le nombre 2,5 appartient à $]0; 3[$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

l'équation $A(x) = 2,5$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$.

Encadrement.

$$A(2,3) = 3 - 5,3e^{-2,3} \approx 2,469 < 2,5$$

$$A(2,4) = 3 - 5,4e^{-2,4} \approx 2,510 > 2,5$$

Comme A est strictement croissante :

$$2,3 < \alpha < 2,4$$

Correction de la question 7

La valeur moyenne de f sur $[0; 1]$ est $\mu = \frac{1}{1-0} \int_0^1 f(x) dx = A(1)$.

$$\mu = 3 - \frac{4}{e} \approx 1,53$$

Cohérence : f décroît de $f(0) = 2$ à $f(1) = \frac{3}{e} \approx 1,10$. $1,10 \leq 1,53 \leq 2$

Points clés attendus pour l'exercice 1

- **Q1** : croissances comparées citées, asymptote conclue.
- **Q2** : formule du produit, factorisation, signe justifié, tableau avec $f(0)$ et limite.
- **Q3** : F' calculée et égale à f .
- **Q4** : positivité de f justifiée, crochet, résultat en u.a. puis conversion en cm^2 avec l'aire de l'unité (4 cm^2).
- **Q5** : limite justifiée, interprétation en termes d'aire.
- **Q6** : $A' = f > 0$, continuité, stricte monotonie, limites, corollaire du TVI cité, deux valeurs pour l'encadrement.
- **Q7** : formule de la valeur moyenne avec $\frac{1}{b-a}$.

Exercice 2 : une suite d'intégrales avec des puissances du logarithme

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout n , $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$. En déduire I_2 .
3. Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante. Que peut-on en déduire ?
4. Montrer que, pour tout n , $(n+1)I_n \leq e$. En déduire la limite de (I_n) .
5. On utilise le script suivant :

```
from math import e

def calcul(n):
    I = e - 1
    for k in range(n):
        I = e - (k + 1)*I
    return I
```

Que calcule-t-il ? Pour $n = 20$, il renvoie une valeur négative (environ -129). Pourquoi ce résultat est-il absurde ?

Correction de la question 1

$$I_0 = \int_1^e 1 dx$$

$$I_0 = e - 1$$

$$I_1 = \int_1^e \ln x dx = \left[x \ln x - x \right]_1^e = (e - e) - (0 - 1)$$

$$I_1 = 1$$

Correction de la question 2

On pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = (\ln x)^{n+1}$. Alors $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{(n+1)(\ln x)^n}{x}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[1; e]$.

Par intégration par parties :

$$I_{n+1} = \left[x(\ln x)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e x \times \frac{(n+1)(\ln x)^n}{x} dx = e \times 1 - 0 - (n+1) \int_1^e (\ln x)^n dx$$

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n$$

Pour $n = 1$: $I_2 = e - 2I_1$.

$$I_2 = e - 2 \approx 0,718$$

Correction de la question 3

Positivité. Pour $x \in [1; e]$, $0 \leq \ln x \leq 1$. Donc $(\ln x)^n \geq 0$, ce qui donne $I_n \geq 0$ par positivité de l'intégrale.

Monotonie. $(\ln x)^{n+1} = (\ln x)^n \times \ln x \leq (\ln x)^n$. Donc $I_{n+1} \leq I_n$ par croissance de l'intégrale.

La suite (I_n) est positive et décroissante.

Décroissante et minorée par 0 :

elle converge.

Correction de la question 4

De la relation de la question 2 : $e = I_{n+1} + (n+1)I_n$. Comme $I_{n+1} \geq 0$: $(n+1)I_n \leq e$.

$$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

Comme $\frac{e}{n+1} \rightarrow 0$:

d'après le théorème des gendarmes, $\lim I_n = 0$

Correction de la question 5

Le script part de $I_0 = e - 1$. Il applique la relation de récurrence n fois.

Il calcule I_n .

Pour $n = 20$, la valeur renvoyée est négative. Or $I_{20} \geq 0$ (question 3). Et même $I_{20} \leq \frac{e}{21} \approx 0,13$ (question 4).

Le résultat est absurde.

Explication : c'est une instabilité numérique. Chaque étape multiplie l'erreur d'arrondi commise sur I_k par $(k+1)$.

Après 20 étapes, l'erreur initiale (de l'ordre de 10^{-16}) est multipliée par $20!$, soit environ 10^{18} .

Elle domine alors le résultat.

Pour calculer I_n pour de grandes valeurs de n , il faut une autre méthode.

Points clés attendus pour l'exercice 2

- **Q1** : les deux valeurs, avec la primitive $x \ln x - x$ de $\ln$.
- **Q2** : u' et v posés, u et v' calculés, régularité C^1 citée, crochet calculé (nul en 1, e en e), formule finale, I_2 .
- **Q3** : encadrement de $\ln x$ sur $[1; e]$, positivité, croissance de l'intégrale, théorème de convergence des suites monotones bornées.
- **Q4** : utilisation de $I_{n+1} \geq 0$, théorème des gendarmes cité.
- **Q5** : le script est compris, l'absurdité est justifiée par la question 3 ou 4, l'explication de l'instabilité est donnée.

Exercice 3 : l'aire entre une courbe et sa tangente

On considère la fonction exponentielle et sa courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé.

On note T la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

Soit $\mathcal{D}$ le domaine compris entre $\mathcal{C}$, T et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

1. Déterminer l'équation réduite de T .
2. Étudier la convexité de la fonction exponentielle et en déduire la position relative de $\mathcal{C}$ et T .
3. Calculer l'aire de $\mathcal{D}$ en unités d'aire.
4. On pose $g(x) = e^x - x - 1$.

Montrer que g est croissante sur $[0; 1]$.

On partage $[0; 1]$ en n intervalles de même longueur $h = \frac{1}{n}$.

Montrer que $S_g \leq \mathcal{A} \leq S_d$, où S_g et S_d sont les sommes de rectangles à gauche et à droite de g , et où $\mathcal{A}$ est l'aire de $\mathcal{D}$.

5. Pour $n = 100$, un script Python donne $S_g \approx 0,2147$ et $S_d \approx 0,2219$. Vérifier la cohérence avec la question 3 et calculer l'amplitude de l'encadrement.

Correction de la question 1

La fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$. La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \exp(0) + \exp'(0)(x - 0) = 1 + x$.

$$T : y = x + 1$$

Correction de la question 2

$\exp'' = \exp > 0$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

Sa courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes.

Donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de $T : e^x \geq x + 1$ pour tout réel x .

Correction de la question 3

D'après la question 2, $e^x \geq x + 1$ sur $[0; 1]$.

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (e^x - (x + 1)) dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2} - x \right]_0^1 = \left(e - \frac{1}{2} - 1 \right) - 1$$

$$\mathcal{A} = e - \frac{5}{2} \text{ u.a.} \approx 0,218 \text{ u.a.}$$

Correction de la question 4

g est dérivable sur $[0; 1]$ et $g'(x) = e^x - 1 \geq 0$ pour $x \geq 0$.

Donc g est croissante sur $[0; 1]$.

Elle est aussi positive ($g(0) = 0$). Sur chaque intervalle $[x_k; x_{k+1}]$ de longueur h : $g(x_k) \leq g(x) \leq g(x_{k+1})$. Donc $h g(x_k) \leq \int g \leq h g(x_{k+1})$.

En additionnant (relation de Chasles) :

$$S_g \leq \mathcal{A} \leq S_d$$

avec $S_g = h[g(0) + \dots + g(1-h)]$ et $S_d = h[g(h) + \dots + g(1)]$.

Correction de la question 5

La valeur exacte de la question 3 est $e - 2,5 \approx 0,2183$. Elle vérifie bien : $0,2147 \leq 0,2183 \leq 0,2219$

L'amplitude de l'encadrement est $S_d - S_g = h[g(1) - g(0)] = \frac{1}{100}(e - 2 - 0)$.

$\approx 0,0072$

(ce qui correspond à $0,2219 - 0,2147 = 0,0072$).

L'amplitude tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$: la méthode des rectangles converge.

Points clés attendus pour l'exercice 3

- **Q1** : formule de la tangente appliquée avec $\exp(0) = 1$ et $\exp'(0) = 1$.
- **Q2** : $\exp''$ calculée, signe, convexité, conséquence sur la position de la courbe par rapport à sa tangente.
- **Q3** : position relative justifiée avant le calcul, « haut – bas » écrit, primitive, crochet, résultat exact et approché en u.a.
- **Q4** : dérivée de g et signe justifié, encadrement sur chaque sous-intervalle, Chasles.
- **Q5** : cohérence numérique vérifiée, amplitude $S_d - S_g = h[g(1) - g(0)]$.

Les réflexes à retenir

- Une **aire** se rédige en quatre temps : positivité (ou position relative), formule, primitive avec crochet, résultat en u.a.
- Une **intégration par parties** s'écrit avec u' , v , u , v' , la régularité C^1 et le crochet.
- Une **suite d'intégrales** suit le plan : premiers termes, récurrence, positivité, monotonie, limite.
- Une **équation à solution unique** s'obtient avec le corollaire du TVI : continuité, stricte monotonie, limites.
- La **méthode des rectangles** donne un encadrement si la fonction est monotone.

Aller plus loin avec les vrais sujets

Quand tu es à l'aise avec ce chapitre, entraîne-toi sur les exercices de calcul intégral des sujets officiels des années précédentes.

Ils sont disponibles sur le site de l'[APMEP](https://apmep.fr/).

Chronomètre-toi et rédige comme le jour du bac.