

Primitives et équations différentielles : le cours

Une **primitive** de f , c'est une fonction dont la dérivée est f : on « remonte » la dérivation. Une **équation différentielle**, c'est une équation dont l'inconnue est une fonction, reliée à sa propre dérivée.

Elles servent à modéliser ce qui évolue avec le temps :

- le café qui refroidit ;
- la radioactivité ;
- la charge d'un condensateur ;
- une population.

Dans tout le cours, tu verras des astuces , des pièges et un peu d'humour .

Comment utiliser ce cours

- Lis une partie, puis fais tout de suite la fiche correspondante.
- Apprends par cœur la **table des primitives** (parties 2 et 3) : c'est ta dérivation à l'envers.
- **Vérifie toujours une primitive en la dérivant** : c'est un contrôle de dix secondes qui sauve des exercices entiers.

1. Les primitives : définition et propriétés

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Une **primitive** de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que :

$$F' = f$$

Existence : toute fonction **continue** sur un intervalle I admet des primitives sur I (théorème admis).

Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante : si F est une primitive de f sur I , les primitives de f sur I sont les fonctions $F + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Condition initiale : pour tous $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une **unique** primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Pièges :

- Oublier « $+C$ » : une fonction n'a pas *une* primitive, elle en a une infinité.
- Confondre primitive et dérivée : dériver simplifie, primitiver « complique » (il faut souvent ajuster des constantes).
- Croire que la primitive d'un produit est le produit des primitives : c'est faux.

Chercher une primitive sans vérifier en dérivant, c'est traverser une rue les yeux fermés : ça marche parfois, mais le jour où ça rate, c'est cher.

2. Les primitives usuelles

- $f(x) = k$ (constante) : $F(x) = kx$
- $f(x) = x^n$ (n entier, $n \neq -1$) : $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ (sur $]0; +\infty[$ si $n < 0$)
- $f(x) = \frac{1}{x}$: $F(x) = \ln x$ sur $]0; +\infty[$ (et $\ln |x|$ sur chaque intervalle ne contenant pas 0)
- $f(x) = \frac{1}{x^2}$: $F(x) = -\frac{1}{x}$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$: $F(x) = 2\sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$
- $f(x) = e^x$: $F(x) = e^x$
- $f(x) = \cos x$: $F(x) = \sin x$
- $f(x) = \sin x$: $F(x) = -\cos x$

Si F est une primitive de f et G une primitive de g :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$;
- kF est une primitive de kf (k réel).

3. Les primitives de fonctions composées

Ce sont les formules de dérivation composée, lues à l'envers. Pour u dérivable sur I :

- $u'u^n$ ($n \neq -1$) a pour primitive $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ (avec $u \neq 0$ sur I si $n < 0$).
- $\frac{u'}{u}$ a pour primitive $\ln |u|$ ($\ln u$ si $u > 0$ sur I).
- $\frac{u'}{u^2}$ a pour primitive $-\frac{1}{u}$.
- $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ a pour primitive $2\sqrt{u}$ ($u > 0$ sur I).
- $u'e^u$ a pour primitive e^u .
- Pour $a \neq 0$: $\cos(ax + b)$ a pour primitive $\frac{\sin(ax + b)}{a}$; $\sin(ax + b)$ a pour primitive $-\frac{\cos(ax + b)}{a}$.
- Plus généralement, $f(ax + b)$ a pour primitive $\frac{F(ax + b)}{a}$.

Exemples.

$(2x + 1)^3$ a pour primitive $\frac{(2x + 1)^4}{4}$. (La dérivée de $2x + 1$ est 2, il faut diviser par 2×4 .)

$\frac{2x}{x^2 + 1}$ a pour primitive $\ln(x^2 + 1)$.

xe^{x^2} a pour primitive $\frac{e^{x^2}}{2}$.

Astuces :

- Repère la **forme** : est-ce $u'u^n$, $\frac{u'}{u}$, $u'e^u$? Puis identifie u et u' .
- Si u' « manque » à une constante près, **ajuste avec un facteur** : $xe^{x^2} = \frac{1}{2} \times (2x)e^{x^2}$.
- Pour $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$, **linéarise** : $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.
- Pour une fraction rationnelle, **décompose** : $\frac{2x+3}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}$.

4. Les équations différentielles : vocabulaire

Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction y , reliée à sa dérivée y' .

Une **solution** sur un intervalle I est une fonction dérivable sur I qui vérifie l'égalité pour tout x de I .

Résoudre l'équation, c'est trouver **toutes** ses solutions.

5. L'équation $y' = ay$

Théorème. Soit a un réel. Les solutions de $y' = ay$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$, avec $C \in \mathbb{R}$. Pour tous x_0 et y_0 , il existe une **unique** solution vérifiant $y(x_0) = y_0$.

Démonstration. La fonction $x \mapsto Ce^{ax}$ vérifie bien $y' = ay$. Réciproquement, soit y une solution. On pose $g(x) = y(x)e^{-ax}$.

$$g'(x) = y'(x)e^{-ax} - ay(x)e^{-ax} = (y'(x) - ay(x))e^{-ax} = 0$$

Donc g est constante, égale à un réel C , et $y(x) = Ce^{ax}$. Pour la condition initiale : $y(x_0) = Ce^{ax_0} = y_0$ impose $C = y_0 e^{-ax_0}$, une seule valeur.

Conséquence utile : une solution de $y' = ay$ est soit **identiquement nulle**, soit **jamais nulle** (Ce^{ax} ne s'annule pas si $C \neq 0$). C'est la base de la caractérisation de l'exponentielle : la solution de $y' = y$ avec $y(0) = 1$ est **exp**.

6. L'équation $y' = ay + b$

Théorème. Soient $a \neq 0$ et b deux réels. Les solutions de $y' = ay + b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, avec $C \in \mathbb{R}$. Pour $a = 0$, $y' = b$ et les solutions sont $x \mapsto bx + C$.

Idée. La constante $-\frac{b}{a}$ est une solution particulière. (Sa dérivée est nulle et $a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = 0$.) En posant $z = y + \frac{b}{a}$:

$$z' = y' = ay + b = a\left(y + \frac{b}{a}\right) = az$$

On retombe sur $z' = az$, donc $z = Ce^{ax}$.

Exemple. $y' = -2y + 4$. La constante 2 est solution particulière ($-2 \times 2 + 4 = 0$). Les solutions sont $y(x) = Ce^{-2x} + 2$.

Avec $y(0) = 5$: $C + 2 = 5$, soit $C = 3$.

$$y(x) = 3e^{-2x} + 2$$

Pièges :

- Écrire $y = Ce^{ax} + \frac{b}{a}$ (mauvais signe) : la solution constante est $-\frac{b}{a}$.
- Oublier de **mettre l'équation sous la forme** $y' = ay + b$ avant de lire a et b . $2y' + 6y = 8$ s'écrit $y' = -3y + 4$.
- Calculer C avec $y(0)$ alors qu'on a la condition en un autre point : le C s'obtient en remplaçant x par x_0 .

7. L'équation $y' = ay + f$

Théorème. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Si y_0 est **une solution particulière** de $y' = ay + f$, alors les solutions de $y' = ay + f$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} + y_0(x)$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Méthode :

1. Trouve une solution particulière y_0 .
2. Écris la solution générale $Ce^{ax} + y_0(x)$.
3. Utilise la condition initiale pour trouver C .

Pourquoi ça marche : y est solution si et seulement si $y - y_0$ est solution de $y' = ay$, car :

$$(y - y_0)' = (ay + f) - (ay_0 + f) = a(y - y_0)$$

Chercher une solution particulière : on la cherche de la même « forme » que f .

- f polynôme de degré n : y_0 polynôme de degré n (avec des coefficients à identifier).
- $f(x) = ke^{mx}$ avec $m \neq a$: $y_0(x) = ce^{mx}$. Si $m = a$: $y_0(x) = cxe^{ax}$.
- $f(x) = k \cos x$ ou $k \sin x$: $y_0(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$.

Exemple. $y' = y + 2x$. On cherche $y_0(x) = px + q$. Alors $y_0' = p$ et $y_0 + 2x = (p + 2)x + q$.

L'égalité $y_0' = y_0 + 2x$ pour tout x impose $p + 2 = 0$ et $p = q$, donc $p = -2$ et $q = -2$.

Solution particulière : $y_0(x) = -2x - 2$.

Solutions : $y(x) = Ce^x - 2x - 2$.

Astuce : au bac, l'énoncé donne souvent une **solution particulière** ou la **forme** à chercher. Vérifie-la toujours en la remplaçant dans l'équation, et rédige la vérification.

8. La modélisation : quatre équations à connaître

Refroidissement de Newton : la température T d'un objet dans un milieu à la température T_{ext} vérifie $T' = -k(T - T_{\text{ext}})$, avec $k > 0$. Solution :

$$T(t) = T_{\text{ext}} + (T_0 - T_{\text{ext}}) e^{-kt}$$

La température tend vers T_{ext} .

Décroissance radioactive : $N' = -\lambda N$, donc $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. Le **temps de demi-vie** est $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Charge d'un condensateur : $u' = \frac{E - u}{RC}$. Solution avec $u(0) = 0$:

$$u(t) = E \left(1 - e^{-t/(RC)} \right)$$

Chute avec frottement : $v' = g - kv$. Solution avec $v(0) = 0$:

$$v(t) = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt})$$

La **vitesse limite** est $\frac{g}{k}$.

Pour interpréter : une solution constante est un **équilibre**. Le signe de a dit si les solutions s'en rapprochent ($a < 0$) ou s'en éloignent ($a > 0$) quand $t \rightarrow +\infty$.

9. Complément : $y'' + \omega^2 y = 0$

Pour $\omega > 0$, on admet que les solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$, avec A et B réels.

Avec $y(0)$ et $y'(0)$ donnés, A et B sont uniques.

C'est l'équation de l'oscillateur (ressort, pendule pour de petits angles).

10. Les 10 pépites du chapitre

1. **Vérifie en dérivant** toute primitive que tu proposes.
2. $+C$ pour les primitives, Ce^{ax} pour les équations : la constante est le cœur de la réponse.
3. $\frac{u'}{u} \rightarrow \ln|u|$: reconnais le quotient « dérivée du bas sur le bas ».
4. **Ajuste les constantes** quand il manque un facteur ($\div 2$, $\div 3$...).
5. Mets l'équation sous la forme $y' = ay + b$ avant de lire a et b .
6. La solution constante est $-\frac{b}{a}$.
7. **Solution générale = homogène + particulière.**
8. La condition initiale **s'applique en dernier**, sur la solution générale complète.
9. Pour une solution particulière, cherche **la même forme que le second membre**, puis identifie.
10. En modélisation, **interprète** : limite, équilibre, demi-vie, temps de refroidissement.

Complément du programme : deux primitives d'une même fonction

Propriété. Si F et G sont deux primitives de f sur un intervalle I , alors $G - F$ est **constante** sur I .

Démonstration. $(G - F)' = g - f = 0$ sur l'intervalle I . Une fonction de dérivée nulle sur un intervalle est constante. $\square$

Complément du programme : la méthode d'Euler pour $y' = ay + b$

Pour approcher la solution de $y' = f(x, y)$ avec $y(x_0) = y_0$, on avance par pas h en suivant la tangente :

$$x_{k+1} = x_k + h \quad y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k)$$

Exemple. $y' = -2y + 4$ avec $y(0) = 0$ et $h = 0,1$. Alors $y_{k+1} = y_k + 0,1(-2y_k + 4) = 0,8y_k + 0,4$.

```
y = 0
for k in range(10):
    y = y + 0.1 * (-2 * y + 4)
print(y)    # affiche 1.7852516352 (valeur approchée de y(1))
```

La solution exacte est $y(x) = 2 - 2e^{-2x}$ et $y(1) = 2 - 2e^{-2} \approx 1,7293$. L'erreur est de 0,056 : **diviser le pas par 10** diviserait environ l'erreur par 10.

11. Ce qui peut tomber au bac

- Des **primitives** à calculer, à vérifier ou à identifier (fiche 1).
- Des équations $y' = ay$ et $y' = ay + b$ avec condition initiale (fiche 2).
- Des équations $y' = ay + f$ et des **problèmes de modélisation** (fiche 3).

- Une **étude de fonction définie par une équation différentielle** et des démonstrations classiques (fiche 4).

Tu as maintenant le cours. Passe aux quatre fiches, aux exercices type bac, puis au Guide de rédaction du chapitre.