

Primitives et équations différentielles : exercices type bac

Trois exercices complets, dans le style de l'épreuve du bac :

- un problème de refroidissement avec équation différentielle et algorithme ;
- l'étude d'une fonction solution d'une équation avec second membre exponentiel ;
- l'étude d'une fonction définie par une primitive avec équation à solution unique.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie de bac :

- équation réduite ;
- solution particulière vérifiée ;
- condition initiale appliquée à la solution générale ;
- limites justifiées ;
- tableau ;
- théorèmes nommés ;
- conclusion en contexte.

Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 30 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme le jour du bac.
- Pour chaque équation différentielle, écris la forme réduite, la solution générale, puis seulement la condition initiale.
- Si tu bloques sur une question, écris « on admet que... » et passe à la suivante.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : le refroidissement d'un objet

Une pièce est maintenue à $25\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Un objet chauffé à $85\text{ }^{\circ}\text{C}$ est placé dans cette pièce à l'instant $t = 0$ (t en minutes).

Sa température $T(t)$, en $^{\circ}\text{C}$, est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 0,1y = 2,5, \text{ avec } T(0) = 85.$$

1. Résoudre (E) sur $[0; +\infty[$.
2. Montrer que $T(t) = 25 + 60e^{-0,1t}$.
3. Étudier les variations de T et sa limite en $+\infty$. Interpréter.
4. Calculer la vitesse de refroidissement $T'(0)$ et interpréter.
5. À quel instant la température atteint-elle $30\text{ }^{\circ}\text{C}$?
6. Écrire une fonction Python qui renvoie le premier nombre entier de minutes t tel que $T(t) < 30$, et donner la valeur renvoyée.

Exercice 2 : une fonction solution d'une équation avec second membre

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 2e^{-x}$. On note f la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f .

1. Montrer que la fonction u définie par $u(x) = 2e^{-x}$ est une solution particulière de (E) .
2. Résoudre (E) et montrer que $f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$.
3. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Montrer que $f'(x) = 2e^{-2x}(1 - e^x)$ et dresser le tableau de variations de f .
5. Résoudre $f(x) = 0$ et en déduire le signe de $f(x)$.
6. Calculer $f''(x)$, étudier la convexité de f et préciser le point d'inflexion de $\mathcal{C}$.

Exercice 3 : une fonction définie par une primitive

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 1) e^{-x}$.

1. Déterminer les réels a , b , c tels que la fonction F définie par $F(x) = (ax^2 + bx + c) e^{-x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la primitive G de f qui vérifie $G(0) = 0$.
3. Étudier les variations de G et déterminer sa limite en $+\infty$. En déduire une asymptote.
4. Montrer que l'équation $G(x) = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et l'encadrer à 10^{-1} près.

Les réflexes à retenir

- Une équation différentielle se résout en trois temps : **forme réduite, solution générale, condition initiale**.
- Avec un second membre, **vérifie la solution particulière** puis utilise « homogène + particulière ».
- Une fonction définie comme **solution** ou comme **primitive** s'étudie avec les outils habituels (limites, dérivée, tableau, TVI).
- La dérivée d'une primitive est la fonction de départ : $G' = f$ donne le sens de variation gratuitement.
- En modélisation, conclus **en contexte, avec l'unité**.

Aller plus loin avec les vrais sujets

Quand tu es à l'aise avec ce chapitre, entraîne-toi sur les exercices d'équations différentielles des sujets officiels des années précédentes.

Ils sont disponibles sur le site de l'[APMEP](https://apmep.fr/).

Chronomètre-toi et rédige comme le jour du bac.