

Primitives et équations différentielles : exercices type bac

Trois exercices complets, dans le style de l'épreuve du bac :

- un problème de refroidissement avec équation différentielle et algorithme ;
- l'étude d'une fonction solution d'une équation avec second membre exponentiel ;
- l'étude d'une fonction définie par une primitive avec équation à solution unique.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie de bac :

- équation réduite ;
- solution particulière vérifiée ;
- condition initiale appliquée à la solution générale ;
- limites justifiées ;
- tableau ;
- théorèmes nommés ;
- conclusion en contexte.

Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 30 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme le jour du bac.
- Pour chaque équation différentielle, écris la forme réduite, la solution générale, puis seulement la condition initiale.
- Si tu bloques sur une question, écris « on admet que... » et passe à la suivante.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : le refroidissement d'un objet

Une pièce est maintenue à 25°C .

Un objet chauffé à 85°C est placé dans cette pièce à l'instant $t = 0$ (t en minutes).

Sa température $T(t)$, en $^{\circ}\text{C}$, est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 0,1y = 2,5, \text{ avec } T(0) = 85.$$

1. Résoudre (E) sur $[0; +\infty[$.
2. Montrer que $T(t) = 25 + 60e^{-0,1t}$.
3. Étudier les variations de T et sa limite en $+\infty$. Interpréter.
4. Calculer la vitesse de refroidissement $T'(0)$ et interpréter.
5. À quel instant la température atteint-elle 30°C ?
6. Écrire une fonction Python qui renvoie le premier nombre entier de minutes t tel que $T(t) < 30$, et donner la valeur renvoyée.

Correction de la question 1

L'équation (E) équivaut à $y' = -0,1y + 2,5$. Elle est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0,1$ et $b = 2,5$.

La fonction constante $-\frac{b}{a} = 25$ est une solution particulière. ($-0,1 \times 25 + 2,5 = 0$)

Les solutions de (E) sont les fonctions $y(t) = Ce^{-0,1t} + 25$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Correction de la question 2

T est une solution de $(E) : T(t) = Ce^{-0,1t} + 25$. La condition $T(0) = 85$ donne $C + 25 = 85$, soit $C = 60$.

$$T(t) = 25 + 60e^{-0,1t}$$

Correction de la question 3

T est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $T'(t) = 60 \times (-0,1)e^{-0,1t} = -6e^{-0,1t} < 0$.

T est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

Comme $-0,1 < 0$, $e^{-0,1t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = 25$$

Interprétation : l'objet refroidit progressivement et sa température tend vers celle de la pièce, 25 °C, sans jamais descendre en dessous.

Correction de la question 4

$$T'(0) = -6e^0 = -6$$

À l'instant initial, la température diminue de 6 °C par minute.

D'après l'équation, on retrouve $T'(0) = -0,1T(0) + 2,5 = -8,5 + 2,5 = -6$

Correction de la question 5

$$T(t) = 30 \iff 25 + 60e^{-0,1t} = 30 \iff e^{-0,1t} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12} \iff -0,1t = -\ln 12 \iff t = 10 \ln 12$$

La température atteint 30 °C au bout de $10 \ln 12 \approx 24,8$ minutes.

Correction de la question 6

```
from math import exp

def minutes():
    t = 0
    while 25 + 60*exp(-0.1*t) >= 30:
        t = t + 1
    return t
```

La boucle se termine car $T(t) \rightarrow 25 < 30$. Comme T est décroissante et que $T(t) = 30$ pour $t \approx 24,85$:

$$T(24) \approx 30,4 \geq 30$$

$$T(25) \approx 29,9 < 30$$

La fonction renvoie 25.

Points clés attendus pour l'exercice 1

- **Q1** : forme réduite $y' = ay + b$, a et b identifiés, solution constante $-\frac{b}{a}$, solution générale avec $C \in \mathbb{R}$.
- **Q2** : la condition initiale est appliquée à la solution générale.
- **Q3** : dérivée avec signe justifié, limite justifiée par le signe de $-0,1$, interprétation en contexte.
- **Q4** : valeur et unité ($^{\circ}\text{C}$ par minute), signe interprété.
- **Q5** : équivalences successives, passage à $\ln$, valeur exacte puis approchée avec l'unité.
- **Q6** : condition du `while` correcte, terminaison justifiée, valeur renvoyée justifiée par deux valeurs de T .

Exercice 2 : une fonction solution d'une équation avec second membre

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 2e^{-x}$. On note f la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f .

1. Montrer que la fonction u définie par $u(x) = 2e^{-x}$ est une solution particulière de (E) .
2. Résoudre (E) et montrer que $f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$.
3. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Montrer que $f'(x) = 2e^{-2x}(1 - e^x)$ et dresser le tableau de variations de f .
5. Résoudre $f(x) = 0$ et en déduire le signe de $f(x)$.
6. Calculer $f''(x)$, étudier la convexité de f et préciser le point d'inflexion de $\mathcal{C}$.

Correction de la question 1

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -2e^{-x}$. Alors :

$$u'(x) + 2u(x) = -2e^{-x} + 4e^{-x} = 2e^{-x}$$

Donc u est une solution particulière de (E) .

Correction de la question 2

Les solutions de l'équation homogène $y' + 2y = 0$, c'est-à-dire $y' = -2y$, sont les fonctions Ce^{-2x} . Comme u est une solution particulière :

les solutions de (E) sont les fonctions $y(x) = Ce^{-2x} + 2e^{-x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

La condition $f(0) = 1$ donne $C + 2 = 1$, soit $C = -1$.

$$f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$$

Correction de la question 3

En $+\infty$. $e^{-x} \rightarrow 0$ et $e^{-2x} \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$$

La droite $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

En $-\infty$. Pour tout x , $f(x) = e^{-2x}(2e^x - 1)$. Quand $x \rightarrow -\infty$, $e^{-2x} \rightarrow +\infty$ et $2e^x - 1 \rightarrow -1$. Par produit :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$$

Correction de la question 4

f est dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = -2e^{-x} + 2e^{-2x} = 2e^{-2x}(-e^x + 1)$ (car $e^{-x} = e^{-2x} \times e^x$).

$$f'(x) = 2e^{-2x}(1 - e^x)$$

Comme $e^{-2x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - e^x$. Positif si $x < 0$, négatif si $x > 0$.

Tableau de variations : f est strictement croissante sur $] -\infty ; 0]$ (de la limite $-\infty$ à $f(0) = 1$).

Puis strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$ (de 1 à la limite 0).

Le maximum est $f(0) = 1$.

Correction de la question 5

$f(x) = e^{-2x}(2e^x - 1)$. Comme $e^{-2x} > 0$: $f(x) = 0 \iff 2e^x - 1 = 0 \iff e^x = \frac{1}{2} \iff x = -\ln 2$.

L'équation $f(x) = 0$ admet pour unique solution $-\ln 2$.

$f(x)$ est du signe de $2e^x - 1$. Positif si $e^x > \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $x > -\ln 2$.

$f(x) < 0$ sur $] -\infty ; -\ln 2[$ et $f(x) > 0$ sur $] -\ln 2 ; +\infty[$.

Correction de la question 6

$$f'(x) = -2e^{-x} + 2e^{-2x}. \quad f''(x) = 2e^{-x} - 4e^{-2x} = 2e^{-2x}(e^x - 2).$$

Comme $e^{-2x} > 0$, $f''(x)$ est du signe de $e^x - 2$. Négatif si $x < \ln 2$, positif si $x > \ln 2$.

f est concave sur $] -\infty ; \ln 2]$ et convexe sur $[\ln 2 ; +\infty[$.

Comme f'' s'annule en changeant de signe en $\ln 2$, on a un point d'inflexion. $f(\ln 2) = 2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Le point d'inflexion de $\mathcal{C}$ est $\left(\ln 2; \frac{3}{4}\right)$.

Points clés attendus pour l'exercice 2

- **Q1** : $u' + 2u$ calculé et égalé à $2e^{-x}$.
- **Q2** : équation homogène résolue, théorème « solution générale = homogène + particulière » utilisé, condition initiale appliquée après.
- **Q3** : les deux limites justifiées, la factorisation par e^{-2x} en $-\infty$, asymptote conclue.
- **Q4** : factorisation détaillée de f' , signe justifié, tableau avec limites et maximum.
- **Q5** : équivalences, exponentielle strictement positive citée, signe de f justifié.
- **Q6** : f'' factorisée, signe justifié, point d'inflexion avec ses deux coordonnées.

Exercice 3 : une fonction définie par une primitive

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$.

1. Déterminer les réels a, b, c tels que la fonction F définie par $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la primitive G de f qui vérifie $G(0) = 0$.
3. Étudier les variations de G et déterminer sa limite en $+\infty$. En déduire une asymptote.
4. Montrer que l'équation $G(x) = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et l'encadrer à 10^{-1} près.

Correction de la question 1

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit.

$$F'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x}$$

On veut $F'(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$ pour tout x . Il suffit d'identifier les coefficients :

$$-a = 1$$

$$2a - b = 0$$

$$b - c = 1$$

Donc $a = -1$, $b = 2a = -2$, $c = b - 1 = -3$.

$F(x) = -(x^2 + 2x + 3)e^{-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Correction de la question 2

Les primitives de f sont $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$. $G(0) = F(0) + C = -3 + C = 0$, donc $C = 3$.

$$G(x) = 3 - (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$$

Correction de la question 3

$G' = f$, et $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x} > 0$ pour tout x .

Donc G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

En $+\infty$. $(x^2 + 2x + 3)e^{-x} = x^2e^{-x} + 2xe^{-x} + 3e^{-x}$. Par croissances comparées, $x^2e^{-x} \rightarrow 0$ et $xe^{-x} \rightarrow 0$, et $3e^{-x} \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 3$$

La droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à la courbe de G en $+\infty$. Et $G(x) < 3$ pour tout x (car $(x^2 + 2x + 3)e^{-x} > 0$).

En $-\infty$. $x^2 + 2x + 3 \rightarrow +\infty$ et $e^{-x} \rightarrow +\infty$. Donc $(x^2 + 2x + 3)e^{-x} \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = -\infty$$

Correction de la question 4

G est continue (dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Elle va de la limite $-\infty$ en $-\infty$ à la limite 3 en $+\infty$.

Le nombre 1 est strictement compris entre $-\infty$ et 3 .

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

l'équation $G(x) = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Encadrement.

$$G(1,2) = 3 - 6,84 e^{-1,2} \approx 0,940 < 1$$

$$G(1,3) = 3 - 7,29 e^{-1,3} \approx 1,013 > 1$$

Comme G est strictement croissante :

$$1,2 < \alpha < 1,3$$

Points clés attendus pour l'exercice 3

- **Q1** : F' calculée avec la formule du produit, identification des coefficients écrite (trois équations), primitive donnée.
- **Q2** : « $+C$ » puis détermination de C par la condition $G(0) = 0$.
- **Q3** : le signe de G' est justifié ($e^{-x} > 0$ et $x^2 + 1 > 0$), limites par croissances comparées, asymptote justifiée par la limite.
- **Q4** : le corollaire du TVI est cité avec ses hypothèses (continuité, stricte monotonie, 1 compris entre les limites), encadrement justifié par deux valeurs de G .

Les réflexes à retenir

- Une équation différentielle se résout en trois temps : **forme réduite, solution générale, condition initiale**.
- Avec un second membre, **vérifie la solution particulière** puis utilise « homogène + particulière ».
- Une fonction définie comme **solution** ou comme **primitive** s'étudie avec les outils habituels (limites, dérivée, tableau, TVI).
- La dérivée d'une primitive est la fonction de départ : $G' = f$ donne le sens de variation gratuitement.
- En modélisation, conclus **en contexte, avec l'unité**.

Aller plus loin avec les vrais sujets

Quand tu es à l'aise avec ce chapitre, entraîne-toi sur les exercices d'équations différentielles des sujets officiels des années précédentes.

Ils sont disponibles sur le site de l'[APMEP](https://apmep.fr/).

Chronomètre-toi et rédige comme le jour du bac.