

Guide de rédaction : primitives et équations différentielles

Ce guide complète le Guide de rédaction général.

Il rassemble, pour le chapitre Primitives et équations différentielles, **les quatorze situations qui reviennent au bac** et, pour chacune, la rédaction modèle.

Dans ce chapitre, la rédaction suit un protocole très précis : le respecter, c'est déjà avoir la moitié des points.

Le principe du chapitre

Avec les primitives et les équations différentielles, un correcteur regarde surtout **cinq choses** :

- la **forme reconnue** (u et u' identifiés) avant toute primitive ;
- la **vérification par dérivation** ;
- la **forme réduite** $y' = ay + b$ avec a et b écrits ;
- la **solution générale** avec $C \in \mathbb{R}$ avant la condition initiale ;
- la **conclusion en contexte** avec l'**unité** pour les problèmes de modélisation.

1. Les quatorze situations et leur rédaction modèle

Situation 1 : une primitive usuelle.

« Sur $]0; +\infty[$, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\ln x$, et une primitive de $\sqrt{x}$ est $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$. Les primitives de f sont les fonctions $F(x) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$. »

Précise l'**intervalle** dès qu'il y a $\ln$, $\sqrt{}$ ou un dénominateur.

Situation 2 : une primitive de fonction composée $(x(x^2 + 1)^4)$.

« f est de la forme $u'u^n$ avec $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$ et $n = 4$. On a $f(x) = \frac{1}{2} \times 2x (x^2 + 1)^4$.

Une primitive de $u'u^n$ est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$. Donc les primitives de f sont $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(x^2 + 1)^5}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^5}{10} + C$. »

Écris toujours u , u' et n avant le résultat.

Situation 3 : vérifier qu'une fonction est une primitive.

« F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. $F'(x) = e^x + (x - 1)e^x = xe^x = f(x)$. Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. »

Situation 4 : identifier une primitive (a, b, c).

« F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x}$. On veut $F'(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$ pour tout x . Il suffit d'identifier les coefficients : $-a = 1$, $2a - b = 0$, $b - c = 1$. On obtient $a = -1$, $b = -2$, $c = -3$. »

Situation 5 : une primitive avec condition initiale.

« Les primitives de f sont $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$. La condition $G(0) = 0$ donne $-3 + C = 0$, soit $C = 3$. Donc $G(x) = 3 - (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$. »

Situation 6 : mettre sous forme réduite.

« L'équation $2y' - 4y = 8$ équivaut à $y' = 2y + 4$. Elle est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = 2$ et $b = 4$. »

Sans cette ligne, on ne sait pas comment tu lis a et b .

Situation 7 : résoudre $y' = ay$.

« Les solutions de $y' = -2y$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $y(x) = Ce^{-2x}$, avec $C \in \mathbb{R}$. »

Situation 8 : résoudre $y' = ay + b$.

« Avec $a = -2$ et $b = 4$, la fonction constante $-\frac{b}{a} = 2$ est une solution particulière ($-2 \times 2 + 4 = 0$). Les solutions sont les fonctions $y(x) = Ce^{-2x} + 2$, avec $C \in \mathbb{R}$. »

Situation 9 : la condition initiale.

« La condition $y(0) = 5$ donne $C + 2 = 5$, soit $C = 3$. Donc $y(x) = 3e^{-2x} + 2$. Vérification : $y'(x) = -6e^{-2x}$ et $-2y(x) + 4 = -6e^{-2x} - 4 + 4$ »

Applique la condition à la **solution générale complète**, et vérifie si tu as le temps.

Situation 10 : vérifier une solution particulière.

« La fonction $u(x) = 2e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -2e^{-x}$. Alors $u'(x) + 2u(x) = -2e^{-x} + 4e^{-x} = 2e^{-x}$. Donc u est solution particulière de (E) . »

Situation 11 : la solution générale avec second membre.

« Les solutions de l'équation homogène $y' = -2y$ sont Ce^{-2x} . Comme u est une solution particulière de (E) , les solutions de (E) sont les fonctions $y(x) = Ce^{-2x} + 2e^{-x}$, avec $C \in \mathbb{R}$. »

Nomme le principe : **solution générale = solution de l'équation homogène + solution particulière.**

Situation 12 : étudier une fonction solution.

« $f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$.

Limite en $+\infty$: $e^{-x} \rightarrow 0$ et $e^{-2x} \rightarrow 0$ donc $\lim f = 0$.

Limite en $-\infty$: $f(x) = e^{-2x}(2e^x - 1)$ avec $e^{-2x} \rightarrow +\infty$ et $2e^x - 1 \rightarrow -1$, donc $\lim f = -\infty$.

$f'(x) = 2e^{-2x}(1 - e^x)$, du signe de $1 - e^x$. Tableau de variations... »

Situation 13 : un problème de modélisation.

« $T(t) = 25 + 60e^{-0,1t}$. Comme $-0,1 < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = 25$. Interprétation : la température de l'objet tend vers celle de la pièce, 25°C .

$$T(t) = 30 \iff e^{-0,1t} = \frac{1}{12} \iff t = 10 \ln 12 \approx 24,8.$$

Conclusion : la température atteint 30°C au bout d'environ **24,8** minutes. »

Valeur exacte, valeur approchée, unité, phrase de conclusion : les quatre.

Situation 14 : une démonstration avec $g(x) = y(x)e^{-ax}$.

« Soit y une solution de $y' = ay$. On pose $g(x) = y(x)e^{-ax}$. g est dérivable et $g'(x) = y'(x)e^{-ax} - ay(x)e^{-ax} = (y'(x) - ay(x))e^{-ax} = 0$. Donc g est constante : il existe C tel que $y(x) = Ce^{ax}$. »

2. Avant / après sur les primitives et les équations différentielles**a) Une primitive.**

« $F(x) = (x^2 + 1)^5$. »

« $f(x) = x(x^2 + 1)^4 = \frac{1}{2} \times 2x(x^2 + 1)^4$ est de la forme $\frac{1}{2}u'u^4$ avec $u(x) = x^2 + 1$. Donc $F(x) = \frac{(x^2 + 1)^5}{10} + C$. »

Ce qui manque à la première : la forme reconnue, le facteur $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$, la constante C .

b) Une équation différentielle.

« $y' = -2y + 4$ donc $y = e^{-2x} + 2$. »

« $y' = -2y + 4$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -2$, $b = 4$. Les solutions sont $y(x) = Ce^{-2x} + 2$, $C \in \mathbb{R}$. »

c) La condition initiale.

« $y(0) = 5$ donc $y = 5e^{-2x} + 2$. »

« $y(0) = C + 2 = 5$, donc $C = 3$ et $y(x) = 3e^{-2x} + 2$. »

La première a mis 5 à la place de C : la constante s'obtient par une équation.

d) Une modélisation.

« $t = 10 \ln 12$. »

« $t = 10 \ln 12 \approx 24,8$. La température atteint 30°C au bout d'environ 24,8 minutes. »

3. Les erreurs de rédaction propres à ce chapitre

- Oublier « $+C$ » pour les primitives et « $C \in \mathbb{R}$ » pour les équations.
- Donner une primitive **sans reconnaître la forme** ni ajuster la constante.
- Ne pas **vérifier** une primitive ou une solution particulière.
- Lire a et b **sans mettre l'équation sous forme réduite**.
- Écrire $+\frac{b}{a}$ au lieu de $-\frac{b}{a}$.
- Appliquer la condition initiale **avant** d'avoir la solution générale complète.
- Chercher $y_0 = ce^{ax}$ en cas de **résonance**.
- Un résultat de modélisation **sans unité** ni interprétation.

4. La check-list du chapitre Primitives et équations différentielles

- Pour chaque primitive, j'ai écrit la **forme** (u, u', n) , l'**intervalle** et « $+C$ ».
- J'ai **vérifié** mes primitives et mes solutions particulières par dérivation.
- J'ai écrit la **forme réduite** $y' = ay + b$, avec a et b .
- Ma **solution générale** contient $C \in \mathbb{R}$ et le terme constant $-\frac{b}{a}$.
- J'ai appliqué la **condition initiale à la solution générale**, avec une équation en C .
- Avec un second membre, j'ai cité « **homogène + particulière** ».
- Mes limites et mes tableaux respectent les règles des chapitres précédents.
- Ma conclusion de modélisation donne la **valeur exacte**, la **valeur approchée**, l'**unité** et une **phrase**.

Une équation différentielle sans « $C \in \mathbb{R}$ », c'est une recette qui ne précise pas la quantité : le résultat dépend de ce que tu as sous la main, et le correcteur n'aime pas les surprises.