

Primitives et équations différentielles**Fiche Standard**

Nom : _____

Date : _____

Exercice S1 : Primitives de fonctions composées

Pour chaque fonction, préciser la forme reconnue (u et u'), justifier le signe de u si nécessaire, puis déterminer une primitive sur l'intervalle I indiqué.

1. $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x + 2}$ sur $I =]0; +\infty[$.
2. $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $I =]0; +\infty[$.
3. $h(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$ sur $I = \mathbb{R}$.
4. $k(x) = \sin x \cos^2 x$ sur $I = \mathbb{R}$.
5. $m(x) = \cos^2 x$ sur $I = \mathbb{R}$ (on rappelle que $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$).
6. $n(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice S2 : Identifier une primitive

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x^2 - 5x + 3)e^{-x}$.

1. On cherche une primitive F de f de la forme $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$, où a, b, c sont des réels.
 - a) Calculer $F'(x)$ en fonction de a, b, c et x .
 - b) En déduire un système d'équations vérifié par a, b, c , puis déterminer a, b, c .
2. Déterminer la primitive G de f sur $\mathbb{R}$ telle que $G(0) = 1$.
3. Étudier le signe de $f(x)$, puis dresser le tableau de variations de G sur $\mathbb{R}$ (limites comprises). On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$ pour tout entier naturel n .

Exercice S3 : Équations avec second membre

Résoudre sur $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes, puis donner la solution vérifiant la condition initiale indiquée. Une solution particulière est indiquée : la vérifier avant de l'utiliser.

1. $(E_1) : y' + y = 3e^{2x}$, avec $y(0) = 2$; solution particulière $y_0(x) = e^{2x}$.
2. $(E_2) : y' - 3y = 5e^{3x}$, avec $y(0) = 1$; solution particulière $y_0(x) = 5xe^{3x}$.
3. $(E_3) : y' + y = 2 \cos x$, avec $y(0) = 0$; solution particulière $y_0(x) = \cos x + \sin x$.
4. Expliquer pourquoi, pour (E_2) , la fonction $x \mapsto ce^{3x}$ ne peut être solution pour aucun réel c .

Exercice S4 : Refroidissement d'un café

Une tasse de café à 90 °C est posée à l'instant $t = 0$ (en minutes) dans une pièce à 20 °C. D'après la loi de refroidissement de Newton, la température $T(t)$ (en °C) vérifie $T'(t) = -k(T(t) - 20)$, où k est un réel strictement positif. Après 5 minutes, le café est à 70 °C.

1. Montrer que $T(t) = 20 + 70e^{-kt}$.
2. Déterminer la valeur exacte de k , puis une valeur approchée à 10^{-3} près.
3. Montrer que $T(10) = 20 + \frac{250}{7}$ et donner une valeur approchée à 0,1 °C près.
4. Déterminer la limite de T en $+\infty$ et l'interpréter.
5. À quel instant (en minutes et secondes) le café atteint-il 40 °C?
6. Calculer $T'(0)$ et interpréter ce résultat avec son unité.

Exercice S5 : Décroissance radioactive

L'iode 131 est un noyau radioactif de demi-vie 8 jours. On étudie un échantillon de 20 mg à l'instant $t = 0$ (t en jours). La masse $N(t)$ d'iode 131 (en mg) vérifie $N' = -\lambda N$, avec $\lambda > 0$.

1. Donner l'expression de $N(t)$ en fonction de λ et t .
2. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $N\left(t + \frac{\ln 2}{\lambda}\right) = \frac{1}{2}N(t)$. En déduire la valeur exacte de λ .
3. Calculer la masse restante au bout de 30 jours (arrondie au centième de mg).
4. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier n tel que la masse restante soit inférieure à 1 % de la masse initiale.
5. Compléter le programme suivant pour qu'il renvoie ce même entier.

```
from math import exp, log
```

```
def seuil():
    lam = log(2) / 8
    n = 0
    while .....:
        n = n + 1
    return n
```

Exercice S6 : Un étang et un prélèvement annuel

Un étang contient 15 milliers de poissons à l'instant $t = 0$ (t en années). Sans prélèvement, l'effectif P (en milliers) vérifie $P' = 0,1 P$. Un pêcheur prélève chaque année une quantité continue q (en milliers de poissons par an), avec $q > 0$: l'effectif vérifie alors $(E_q) : P' = 0,1 P - q$, avec $P(0) = 15$.

1. Résoudre (E_q) : exprimer $P(t)$ en fonction de q et t .
2. On suppose $q = 2$. Déterminer le sens de variation de P , puis l'instant t_0 où l'étang est vide (valeur exacte, puis valeur approchée au dixième d'année).
3. Montrer que l'étang n'est jamais vide (c'est-à-dire $P(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$) si et seulement si $q \leq 1,5$.
4. Interpréter la valeur $10q$ (solution constante de (E_q)).

Exercice S7 : Fonction solution d'une équation

On considère l'équation $(E) : y' = -y + 2x + 1$ et la fonction f solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$.

1. Vérifier que $y_0(x) = 2x - 1$ est solution de (E) , puis montrer que $f(x) = e^{-x} + 2x - 1$.
2. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations. Calculer le minimum de f .
4. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et préciser leur position relative.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R} : 0$ et un réel α appartenant à $] -2; -1[$.
6. Compléter la fonction suivante, puis donner la valeur renvoyée par `dichotomie(-2, -1, 0.01)`. En déduire un encadrement de α .

```
from math import exp
```

```
def f(x):
    return exp(-x) + 2*x - 1
```

```
def dichotomie(a, b, e):
    while b - a > e:
        m = (a + b) / 2
        if f(a) * f(m) <= 0:
            b = .....
        else:
            a = .....
```

```
return a, b
```

Exercice S8 : Chute avec frottement

Un parachutiste (avant ouverture du parachute) tombe verticalement. Sa vitesse $v(t)$ (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$), à l'instant t (en secondes), vérifie $v'(t) = g - 0,5 v(t)$, avec $g = 9,8$ et $v(0) = 0$.

1. Montrer que $v(t) = 19,6(1 - e^{-0,5t})$.
2. Déterminer la vitesse limite et l'interpréter.
3. À partir de quel instant la vitesse dépasse-t-elle 90 % de sa vitesse limite ? (valeur exacte, puis valeur approchée au centième de seconde)
4. Soit $x(t)$ la distance parcourue depuis l'instant 0, avec $x' = v$ et $x(0) = 0$. Déterminer $x(t)$, puis calculer la distance parcourue en 10 secondes (arrondie au centimètre).

Exercice S9 : Méthode d'Euler et erreur d'approximation

On considère $y' = -y + 2$ avec $y(0) = 0$ et on approche $y(1)$ par la méthode d'Euler de pas $h = \frac{1}{n}$: $y_0 = 0$ et $y_{k+1} = y_k + h(-y_k + 2)$.

1. Montrer que $y_{k+1} = (1 - h)y_k + 2h$. Montrer que la suite $(y_k - 2)$ est géométrique, puis que $y_k = 2(1 - (1 - h)^k)$.
2. Résoudre l'équation différentielle avec sa condition initiale et donner la valeur exacte de $y(1)$.
3. Calculer y_n (approximation de $y(1)$) et l'erreur $y_n - y(1)$ pour $n = 10$, puis pour $n = 100$ (valeurs arrondies à 10^{-4}). Que constate-t-on ?
4. Le programme ci-dessous implémente la méthode. Quelle valeur renvoie `euler(-1, 2, 0, 0.1, 10)` ?

```
def euler(a, b, y0, h, n):
    y = y0
    for k in range(n):
        y = y + h * (a * y + b)
    return y
```

Exercice S10 : Charge d'un condensateur

Un condensateur de capacité $C = 250 \mu\text{F}$ est branché en série avec un conducteur ohmique de résistance $R = 2 \text{ k}\Omega$ aux bornes d'un générateur de tension constante $E = 12 \text{ V}$. À l'instant $t = 0$ (en secondes), le condensateur est déchargé. La tension $u(t)$ (en volts) aux bornes du condensateur vérifie $u' = \frac{E - u}{RC}$.

1. Montrer que $RC = 0,5 \text{ s}$ et que u est solution de $y' = -2y + 24$ avec $u(0) = 0$.
2. Déterminer $u(t)$ pour tout $t \geq 0$.
3. Déterminer la limite de u en $+\infty$ et montrer que u est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
4. À partir de quel instant la tension dépasse-t-elle 95 % de E ? Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée au centième de seconde, et la comparer à $3RC$.
5. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de u au point d'abscisse 0. Montrer qu'elle coupe la droite d'équation $y = 12$ au point d'abscisse RC .
6. L'intensité du courant est $i(t) = C u'(t)$. Exprimer $i(t)$ en milliampères et calculer $i(0)$.

Exercice S11 : Méthode d'Euler pour $y' = f$

Pour une fonction f continue, la méthode d'Euler de pas h approche la solution de $y' = f(x)$ vérifiant $y(x_0) = y_0$ par $x_{k+1} = x_k + h$ et $y_{k+1} = y_k + h f(x_k)$. On considère l'équation $y' = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ avec la condition $y(1) = 0$.

1. Déterminer la solution exacte y et la valeur exacte de $y(2)$.

2. Avec le pas $h = \frac{1}{4}$ et $x_0 = 1$, calculer à la main les nombres y_1, y_2, y_3 et y_4 (fractions irréductibles). Donner une valeur approchée de y_4 au dix-millième, et son écart avec $y(2)$.
3. On utilise la fonction suivante.

```
def euler(f, x0, y0, h, n):  
    xs = [x0]  
    ys = [y0]  
    for k in range(n):  
        ys.append(ys[-1] + h * f(xs[-1]))  
        xs.append(xs[-1] + h)  
    return xs, ys
```

Quelles listes `xs` et `ys` sont renvoyées par l'appel

```
euler(lambda x: 1/x, 1, 0, 0.25, 4)
```

(valeurs arrondies au dix-millième) ? Que représentent `xs[-1]` et `ys[-1]` ?

4. Pour $h = \frac{1}{n}$ et $x_0 = 1$, l'appel `euler(lambda x: 1/x, 1, 0, 1/n, n)` donne pour `ys[-1]` les valeurs 0,69565 pour $n = 100$, 0,69340 pour $n = 1\,000$ et 0,69317 pour $n = 10\,000$ (arrondies à 10^{-5}). Calculer les écarts avec $y(2)$ (à 10^{-5} près). Comment l'écart évolue-t-il quand le pas est divisé par 10 ?
5. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ n'a pas de primitive que l'on sache exprimer avec les fonctions usuelles. On cherche néanmoins la solution de $y' = e^{-x^2}$ avec $y(0) = 0$. Écrire l'appel de `euler` qui donne une valeur approchée de $y(1)$ avec le pas 0,01. Pour le pas 0,1, l'appel renvoie `ys[-1]  $\approx$  0,7778` : que peut-on dire du signe de y' et de la croissance de y ?