

Corrigé : Primitives et équations différentielles

Fiche Standard

S1.

1. $f = \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^3 + x + 2$ et $u'(x) = 3x^2 + 1$. Sur $]0; +\infty[$, $u(x) > 2 > 0$. Une primitive est $F(x) = \ln(x^3 + x + 2)$.
2. $g(x) = \frac{1}{x} \times \ln x = u' u$ avec $u(x) = \ln x$ et $u'(x) = \frac{1}{x}$. Une primitive est $G(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$.
3. $h = \frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = e^x + 1 > 0$ et $u'(x) = e^x$. Une primitive est $H(x) = -\frac{1}{e^x + 1}$.
4. Avec $u(x) = \cos x$ et $u'(x) = -\sin x$: $k(x) = -u'(x) u(x)^2$. Une primitive est $K(x) = -\frac{\cos^3 x}{3}$.
5. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$. Une primitive de $\cos 2x$ est $\frac{\sin 2x}{2}$. Donc $M(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$.
6. $n = \frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$ et $u'(x) = 2x + 1$. Le discriminant de u vaut $1 - 4 = -3 < 0$ et le coefficient dominant est positif, donc $u > 0$ sur $\mathbb{R}$. Une primitive est $N(x) = 2\sqrt{x^2 + x + 1}$.

Vérification (question 4) : $K'(x) = -\frac{3 \cos^2 x \times (-\sin x)}{3} = \sin x \cos^2 x = k(x)$.

S2.

1. a) F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$F'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x}.$$

- b) Il suffit que, pour tout x , $-ax^2 + (2a - b)x + b - c = 2x^2 - 5x + 3$. On identifie : $-a = 2$, $2a - b = -5$, $b - c = 3$. Donc $a = -2$, $b = 2a + 5 = 1$, $c = b - 3 = -2$. Ainsi $F(x) = (-2x^2 + x - 2)e^{-x}$.
2. Les primitives de f sont $F(x) + C$. La condition $G(0) = 1$ donne $F(0) + C = -2 + C = 1$, donc $C = 3$. **Conclusion :** $G(x) = (-2x^2 + x - 2)e^{-x} + 3$.
3. $2x^2 - 5x + 3 = (x - 1)(2x - 3)$, de racines 1 et $\frac{3}{2}$. Donc $f > 0$ sur $] -\infty; 1[$ et sur $]\frac{3}{2}; +\infty[$, et $f < 0$ sur $]\frac{3}{2}; 1[$. Comme $G' = f$, on obtient les variations de G . En $+\infty$: $x^2 e^{-x}$, $x e^{-x}$ et e^{-x} tendent vers 0, donc $\lim_{+\infty} G = 3$. En $-\infty$: $-2x^2 + x - 2 \rightarrow -\infty$ et $e^{-x} \rightarrow +\infty$, donc $\lim_{-\infty} G = -\infty$. Valeurs : $G(1) = -3e^{-1} + 3 = 3 - \frac{3}{e} \approx 1,90$ et $G\left(\frac{3}{2}\right) = -5e^{-3/2} + 3 \approx 1,88$.

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$		
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
G						

S3.

1. Vérification : $y'_0 + y_0 = 2e^{2x} + e^{2x} = 3e^{2x}$. L'équation homogène $y' = -y$ a pour solutions Ce^{-x} , donc les solutions de (E_1) sont $y(x) = Ce^{-x} + e^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$. La condition $y(0) = C + 1 = 2$ donne $C = 1$.
Conclusion : $y(x) = e^{-x} + e^{2x}$.
2. Vérification : $y'_0(x) = 5e^{3x} + 15xe^{3x}$ et $3y_0(x) = 15xe^{3x}$, donc $y'_0 - 3y_0 = 5e^{3x}$. L'équation homogène $y' = 3y$ a pour solutions Ce^{3x} : les solutions de (E_2) sont $y(x) = Ce^{3x} + 5xe^{3x} = (5x + C)e^{3x}$. La condition $y(0) = C = 1$ donne $C = 1$.
Conclusion : $y(x) = (5x + 1)e^{3x}$.

3. Vérification : $y'_0(x) = -\sin x + \cos x$, donc $y'_0 + y_0 = -\sin x + \cos x + \cos x + \sin x = 2\cos x$. Les solutions de (E_3) sont $y(x) = Ce^{-x} + \cos x + \sin x$. La condition $y(0) = C + 1 = 0$ donne $C = -1$.

Conclusion : $y(x) = -e^{-x} + \cos x + \sin x$.

4. Pour $z(x) = ce^{3x}$: $z' - 3z = 3ce^{3x} - 3ce^{3x} = 0 \neq 5e^{3x}$. Les fonctions de cette forme sont des solutions de l'équation homogène $y' = 3y$, jamais de (E_2) : c'est pourquoi la solution particulière contient un facteur x .

S4.

1. $T' = -kT + 20k$: forme $y' = ay + b$ avec $a = -k \neq 0$ et $b = 20k$. La constante $-\frac{b}{a} = 20$ est solution. Donc $T(t) = Ce^{-kt} + 20$. Avec $T(0) = 90$: $C = 70$. D'où $T(t) = 20 + 70e^{-kt}$.
2. $T(5) = 70 \iff 70e^{-5k} = 50 \iff e^{-5k} = \frac{5}{7} \iff k = \frac{1}{5} \ln \frac{7}{5}$. Valeur approchée : $k \approx 0,067$.
3. $e^{-10k} = (e^{-5k})^2 = \frac{25}{49}$, donc $T(10) = 20 + 70 \times \frac{25}{49} = 20 + \frac{250}{7} \approx 55,7^\circ\text{C}$.
4. Comme $k > 0$, $e^{-kt} \rightarrow 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = 20$. Le café se stabilise à la température de la pièce, 20°C .
5. $T(t) = 40 \iff e^{-kt} = \frac{2}{7} \iff t = \frac{\ln(7/2)}{k} = \frac{5 \ln(7/2)}{\ln(7/5)} \approx 18,62$. Or $0,62 \text{ min} \approx 37 \text{ s}$. **Conclusion :** le café atteint 40°C au bout d'environ 18 minutes et 37 secondes.
6. $T'(0) = -70k = -14 \ln \frac{7}{5} \approx -4,71$. À l'instant initial, la température diminue d'environ $4,7^\circ\text{C}$ par minute. (Cohérence : $T'(0) = -k(90 - 20) = -70k$.)

S5.

1. $N' = -\lambda N$ et $N(0) = 20$ donnent $N(t) = 20e^{-\lambda t}$.
2. $N\left(t + \frac{\ln 2}{\lambda}\right) = 20e^{-\lambda t} e^{-\ln 2} = \frac{1}{2} \times 20e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}N(t)$: la durée $\frac{\ln 2}{\lambda}$ est la demi-vie, indépendante de la masse initiale. Ici la demi-vie vaut 8 jours, donc $\frac{\ln 2}{\lambda} = 8$, soit $\lambda = \frac{\ln 2}{8} \approx 0,087 \text{ jour}^{-1}$.
3. $N(30) = 20e^{-30 \ln 2 / 8} = 20 \times 2^{-15/4} \approx 1,49 \text{ mg}$.
4. $N(n) < 0,01 \times 20 = 0,2 \iff e^{-\lambda n} < 0,01 \iff -\lambda n < -\ln 100 \iff n > \frac{\ln 100}{\lambda} = \frac{8 \ln 100}{\ln 2} \approx 53,15$.
Conclusion : $n = 54$ jours.
5. La boucle continue tant que la masse est encore supérieure ou égale à $0,2 \text{ mg}$.

```
from math import exp, log
```

```
def seuil():
    lam = log(2) / 8
    n = 0
    while 20 * exp(-lam * n) >= 0.2:
        n = n + 1
    return n
```

La fonction renvoie 54.

S6.

1. $P' = 0,1P - q$: $a = 0,1$, $b = -q$, solution constante $-\frac{b}{a} = 10q$. Donc $P(t) = Ce^{0,1t} + 10q$. Avec $P(0) = 15$: $C = 15 - 10q$. **Conclusion :** $P(t) = 10q + (15 - 10q)e^{0,1t}$.
2. Pour $q = 2$: $P(t) = 20 - 5e^{0,1t}$ et $P'(t) = -0,5e^{0,1t} < 0$: P est strictement décroissante. $P(t_0) = 0 \iff e^{0,1t_0} = 4 \iff t_0 = 10 \ln 4 = 20 \ln 2 \approx 13,9$. L'étang est vide au bout d'environ 13,9 ans.
3. Si $q \leq 1,5$: $15 - 10q \geq 0$, donc pour tout $t \geq 0$, $P(t) \geq 10q > 0$. Si $q > 1,5$: $15 - 10q < 0$ et $P(t) = 0 \iff e^{0,1t} = \frac{10q}{10q - 15} = \frac{q}{q - 1,5}$. Ce quotient est strictement supérieur à 1, donc $t = 10 \ln \frac{q}{q - 1,5} > 0$ convient : l'étang se vide. **Conclusion :** l'étang n'est jamais vide si et

seulement si $q \leq 1,5$.

4. $10q$ est l'effectif d'équilibre : si $P(0) = 10q$, la croissance naturelle ($0,1P = q$) compense exactement le prélèvement. Ici $P(0) = 15 \geq 10q$ équivaut à $q \leq 1,5$: la population survit si et seulement si l'effectif initial est au moins égal à l'effectif d'équilibre.

S7.

- $y_0'(x) = 2$ et $-y_0(x) + 2x + 1 = -2x + 1 + 2x + 1 = 2$: y_0 est solution de (E) . Les solutions de $y' = -y$ sont Ce^{-x} , donc celles de (E) sont $y(x) = Ce^{-x} + 2x - 1$. La condition $f(0) = C - 1 = 0$ donne $C = 1$: $f(x) = e^{-x} + 2x - 1$.
- En $+\infty$: $e^{-x} \rightarrow 0$ et $2x - 1 \rightarrow +\infty$, donc $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
En $-\infty$: on écrit $f(x) = e^{-x}(1 + (2x - 1)e^x)$. Par croissances comparées, $xe^x \rightarrow 0$, donc $(2x - 1)e^x \rightarrow 0$; comme $e^{-x} \rightarrow +\infty$, $\lim_{-\infty} f = +\infty$.
- $f'(x) = -e^{-x} + 2$. $f'(x) > 0 \iff e^{-x} < 2 \iff -x < \ln 2 \iff x > -\ln 2$. Donc f est strictement décroissante sur $] -\infty; -\ln 2]$ et strictement croissante sur $[-\ln 2; +\infty[$. Le minimum est $f(-\ln 2) = e^{\ln 2} - 2 \ln 2 - 1 = 1 - 2 \ln 2 \approx -0,39$.

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$		$- \quad 0 \quad +$	
f	$+\infty$	$1 - 2 \ln 2$	$+\infty$

- $f(x) - (2x - 1) = e^{-x} \rightarrow 0$ en $+\infty$: la droite Δ est asymptote oblique. Comme $e^{-x} > 0$, la courbe est strictement au-dessus de Δ .
- Sur $] -\infty; -\ln 2]$, f est continue, strictement décroissante, de limite $+\infty$ en $-\infty$ et de minimum $1 - 2 \ln 2 < 0$: elle s'annule exactement une fois, en un réel α (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires). Comme $f(-2) = e^2 - 5 > 0$ et $f(-1) = e - 3 < 0$, et que $] -2; -1[$ est inclus dans $] -\infty; -\ln 2[$ (car $-1 < -\ln 2$), on a $\alpha \in] -2; -1[$. Sur $[-\ln 2; +\infty[$, f est continue et strictement croissante, avec $f(0) = 0$: elle s'annule exactement une fois, en 0. Les deux intervalles ne se rencontrent qu'en $-\ln 2$, où $f \neq 0$. **Conclusion** : $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions, $\alpha \in] -2; -1[$ et 0.
- Si $f(a)f(m) \leq 0$, la racine est dans $[a; m]$ donc $b = m$; sinon $a = m$.

```

if f(a) * f(m) <= 0:
    b = m
else:
    a = m

```

L'appel `dichotomie(-2, -1, 0.01)` renvoie $(-1.2578125, -1.25)$, donc $-1,258 < \alpha < -1,25$, encadrement d'amplitude inférieure à 0,01.

S8.

- $v' = -0,5v + 9,8$: $a = -0,5$, $b = 9,8$, solution constante $-\frac{b}{a} = 19,6$. Donc $v(t) = Ce^{-0,5t} + 19,6$ et $v(0) = 0$ donne $C = -19,6$: $v(t) = 19,6(1 - e^{-0,5t})$.
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 19,6$. La vitesse se stabilise à $19,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (environ $70,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$) : le frottement compense alors exactement l'accélération de la pesanteur ($v' = 0$).
- $v(t) > 0,9 \times 19,6 \iff 1 - e^{-0,5t} > 0,9 \iff e^{-0,5t} < 0,1 \iff t > 2 \ln 10 \approx 4,61$. La vitesse dépasse 90 % de la vitesse limite à partir de $2 \ln 10 \approx 4,61 \text{ s}$.
- x est une primitive de v : $v(t) = 19,6 - 19,6e^{-0,5t}$ a pour primitives $19,6t + 39,2e^{-0,5t} + K$. La condition $x(0) = 39,2 + K = 0$ donne $K = -39,2$. Donc $x(t) = 19,6t + 39,2e^{-0,5t} - 39,2$. $x(10) = 196 + 39,2e^{-5} - 39,2 = 156,8 + 39,2e^{-5} \approx 157,06 \text{ m}$.

S9.

1. $y_{k+1} = y_k + h(-y_k + 2) = (1-h)y_k + 2h$. Alors $y_{k+1} - 2 = (1-h)y_k + 2h - 2 = (1-h)(y_k - 2)$: la suite $(y_k - 2)$ est géométrique de raison $1-h$ et de premier terme $y_0 - 2 = -2$. Donc $y_k - 2 = -2(1-h)^k$, soit $y_k = 2(1 - (1-h)^k)$.
2. $y' = -y + 2$: solution constante 2, donc $y(x) = Ce^{-x} + 2$ et $y(0) = 0$ donne $C = -2$. Ainsi $y(x) = 2 - 2e^{-x}$ et $y(1) = 2 - \frac{2}{e} \approx 1,2642$.
3. Pour $n = 10$ ($h = 0,1$) : $y_{10} = 2(1 - 0,9^{10}) \approx 1,3026$, erreur $\approx +0,0384$. Pour $n = 100$ ($h = 0,01$) : $y_{100} = 2(1 - 0,99^{100}) \approx 1,2679$, erreur $\approx +0,0037$. Quand le pas est divisé par 10, l'erreur est divisée par environ 10 : l'erreur est à peu près proportionnelle au pas.
4. Avec $a = -1$, $b = 2$, $y_0 = 0$, $h = 0,1$ et $n = 10$, le programme calcule exactement y_{10} : il renvoie environ 1.3026 (valeur $2(1 - 0,9^{10}) = 1,3026431 \dots$).

S10.

1. $RC = 2000 \times 250 \times 10^{-6} = 0,5$ s. Donc $u' = \frac{12-u}{0,5} = -2u + 24$, avec $u(0) = 0$.
2. Forme $y' = ay + b$ avec $a = -2$ et $b = 24$: la constante $-\frac{b}{a} = 12$ est solution. Donc $u(t) = Ce^{-2t} + 12$, et $u(0) = C + 12 = 0$ donne $C = -12$. **Conclusion** : $u(t) = 12(1 - e^{-2t})$.
3. $e^{-2t} \rightarrow 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 12$: le condensateur se charge jusqu'à la tension $E = 12$ V. De plus $u'(t) = 24e^{-2t} > 0$, donc u est strictement croissante.
4. $u(t) > 0,95 \times 12 \iff 1 - e^{-2t} > 0,95 \iff e^{-2t} < 0,05 \iff t > \frac{\ln 20}{2} \approx 1,50$. Or $3RC = 1,5$ s : à $3RC$ près, le condensateur est chargé à 95 % (la valeur exacte $\frac{\ln 20}{2} \approx 1,498$ est très proche de 1,5).
5. $u(0) = 0$ et $u'(0) = 24$, donc la tangente en 0 a pour équation $y = 24t$. Elle coupe la droite $y = 12$ si $24t = 12$, soit $t = 0,5 = RC$.
6. $i(t) = 250 \times 10^{-6} \times 24e^{-2t} = 6 \times 10^{-3} e^{-2t}$ A, soit $i(t) = 6e^{-2t}$ mA. Donc $i(0) = 6$ mA : le courant est maximal à l'instant initial puis décroît vers 0.

S11.

1. Les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ sont $x \mapsto \ln x + C$. Avec $y(1) = 0$: $C = 0$.
Conclusion : $y(x) = \ln x$ et $y(2) = \ln 2 \approx 0,6931$.

2. Avec $x_k = 1 + \frac{k}{4}$ et $f(x_k) = \frac{1}{x_k}$:

$$y_1 = 0 + \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}, \quad y_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}, \quad y_3 = \frac{9}{20} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{9}{20} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60},$$

$$y_4 = \frac{37}{60} + \frac{1}{4} \times \frac{4}{7} = \frac{37}{60} + \frac{1}{7} = \frac{319}{420}.$$

Conclusion : $y_4 = \frac{319}{420} \approx 0,7595$ et $y_4 - \ln 2 \approx 0,0664$ (la méthode surestime ici, car f est décroissante).

3. $\mathbf{xs} = [1; 1,25; 1,5; 1,75; 2]$ et $\mathbf{ys} \approx [0; 0,25; 0,45; 0,6167; 0,7595]$. L'indice -1 désigne le dernier élément de la liste : $\mathbf{xs}[-1] = x_4 = 2$ et $\mathbf{ys}[-1] = y_4$, approximation de $y(2)$.
4. Avec $\ln 2 \approx 0,69315$, les écarts valent $0,69565 - 0,69315 = 0,00250$ pour $n = 100$; $0,69340 - 0,69315 = 0,00025$ pour $n = 1000$; $0,69317 - 0,69315 = 0,00002$ pour $n = 10000$.

Conclusion : quand le pas est divisé par 10, l'écart est divisé par 10 environ : il est proportionnel au pas (de l'ordre de $\frac{0,25}{n}$ ici).

5. On écrit `euler(lambda x: exp(-x**2), 0, 0, 0.01, 100)` (après `from math import exp`) et on lit `ys[-1]` : $x_{100} = 1$. On a $y'(x) = e^{-x^2} > 0$ pour tout x : y est strictement croissante, et $y(1) > y(0) = 0$, ce qui est cohérent avec $0,7778 > 0$.

Conclusion : l'approximation de $y(1)$ s'obtient avec `ys[-1]` ; pour le pas 0,1 elle vaut environ 0,7778.