

Primitives et équations différentielles

Fiche Défi

Nom : _____

Date : _____

Exercice D1 : Démonstration : les solutions de $y' = ay$

Soit a un réel. On rappelle que la dérivée d'un produit de fonctions dérivables est donnée par $(uv)' = u'v + uv'$ et qu'une fonction dérivable de dérivée nulle sur un intervalle I est constante.

1. Montrer que, pour tout réel C , la fonction $x \mapsto Ce^{ax}$ est solution de $y' = ay$ sur $\mathbb{R}$.
2. Réciproquement, soit y une solution de $y' = ay$ sur $\mathbb{R}$. On pose $g(x) = y(x)e^{-ax}$. Calculer g' et en déduire que $y(x) = Ce^{ax}$ pour un certain réel C .
3. Soient x_0 et y_0 deux réels. Montrer qu'il existe une unique solution y de $y' = ay$ telle que $y(x_0) = y_0$.
4. Montrer qu'une solution de $y' = ay$ est soit la fonction nulle, soit une fonction qui ne s'annule jamais.
5. On suppose $a \neq 0$ et on donne un réel b . Montrer que y est solution de $y' = ay + b$ si et seulement si $z = y + \frac{b}{a}$ est solution de $z' = az$. En déduire les solutions de $y' = ay + b$.
6. Application : déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f'(x) = -3(f(x) - 2)$ pour tout réel x , avec $f(0) = 5$.

Exercice D2 : Structure des solutions de $y' = ay + f$

1. Soient F et G deux primitives d'une fonction f sur un intervalle I . Montrer que $G - F$ est constante sur I .
2. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe au plus une primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$. Si f est continue sur I , montrer qu'il en existe exactement une.
3. Soit a un réel, f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et (E) l'équation $y' = ay + f$. On suppose connue une solution particulière y_0 de (E) . Montrer qu'une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $y - y_0$ est solution de $y' = ay$. En déduire toutes les solutions de (E) .
4. Pour aller plus loin, hors programme (le programme donne toujours une solution particulière) : résoudre $(E) : y' + y = xe^{-x}$ sans solution particulière donnée. Pour cela, on pose $z(x) = y(x)e^x$.
 - a) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $z'(x) = x$ pour tout réel x .
 - b) En déduire les solutions de (E) , puis celle qui vérifie $y(0) = 1$.

Exercice D3 : Caractérisation de l'exponentielle

On admet qu'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

1. On pose $h(x) = f(x)f(-x)$. Montrer que h est constante égale à 1. En déduire que f ne s'annule jamais.
2. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$. En étudiant $k(x) = g(x)f(-x)$, montrer que $g = f$ (unicité de f).
3. Fixons un réel y . Montrer que $x \mapsto \frac{f(x+y)}{f(y)}$ est dérivable et égale à sa dérivée, de valeur 1 en 0. En déduire que, pour tous réels x et y , $f(x+y) = f(x)f(y)$.
4. Montrer que $f(x) > 0$ pour tout réel x , puis que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n et tout réel x , $f(nx) = (f(x))^n$. Que retrouve-t-on pour $x = 1$ en notant $e = f(1)$?

Exercice D4 : Une famille de solutions

On considère l'équation $(E) : y' = 2y - 4x + 2$. Pour tout réel C , on note f_C la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_C(x) = Ce^{2x} + 2x$.

1. Montrer que f_C est solution de (E) pour tout réel C , et que toute solution de (E) est de cette forme.
2. Déterminer, selon la valeur de C , les variations de f_C . Pour quelles valeurs de C la fonction f_C est-elle monotone sur $\mathbb{R}$?

3. On cherche le nombre de points d'intersection de la courbe de f_C avec l'axe des abscisses.
 - a) Montrer que $f_C(x) = 0 \iff C = \varphi(x)$, où $\varphi(x) = -2x e^{-2x}$.
 - b) Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}$ (limites comprises, tableau).
 - c) En déduire, selon la valeur de C , le nombre de solutions de l'équation $f_C(x) = 0$.
4. Pour $C = -\frac{1}{e}$, montrer que $f_C(x) \leq 0$ pour tout réel x et interpréter graphiquement.

Exercice D5 : Une équation non linéaire ramenée à une équation linéaire

On considère l'équation $(E) : y' = y - y^2$ et on cherche la fonction f , solution de (E) sur $\mathbb{R}$, qui ne s'annule pas et vérifie $f(0) = \frac{1}{2}$.

1. On pose $g = \frac{1}{f}$.
 - a) Montrer que $g' = -g + 1$.
 - b) En déduire g , puis montrer que $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$.
2. Réciproquement, vérifier que la fonction f ainsi obtenue est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier f : limites en $-\infty$ et $+\infty$, variations, tangente en 0. Montrer que $f(x) + f(-x) = 1$ pour tout x et interpréter graphiquement.
4. Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) \leq \frac{1}{4}$, avec égalité si et seulement si $x = 0$.
5. $f(x)$ modélise la proportion d'individus informés d'une rumeur à l'instant x (en jours). À partir de quel instant plus de 90 % de la population est-elle informée ? (valeur exacte, puis approchée au centième)

Exercice D6 : Oscillateur harmonique (complément)

On admet que, pour $\omega > 0$, les solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t \mapsto A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, avec $A, B \in \mathbb{R}$. Un mobile a pour abscisse $x(t)$ (en cm) à l'instant t (en s), avec $x'' + 4x = 0$, $x(0) = 1$ et $x'(0) = 4$.

1. Déterminer $x(t)$.
2. Retrouver ce résultat en primitivant la vitesse $v(t) = -2 \sin(2t) + 4 \cos(2t)$, avec $x(0) = 1$.
3. Montrer que $E(t) = x'(t)^2 + 4x(t)^2$ est constante et calculer sa valeur. En déduire que $|x(t)| \leq \sqrt{5}$ pour tout t .
4. Montrer qu'il existe un instant $t_0 \in]0; \frac{\pi}{4}[$ tel que $\cos(2t_0) = \frac{1}{\sqrt{5}}$, puis que $x(t_0) = \sqrt{5}$. Que représente $\sqrt{5}$?
5. Montrer que $x(t + \pi) = x(t)$ pour tout t . Que représente π ?

Exercice D7 : Primitives qui demandent une idée

1. Montrer que la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = x \ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien.
2. Déterminer deux réels a et b tels que $F(x) = x^2(a \ln x + b)$ soit une primitive de $x \mapsto x \ln x$ sur $]0; +\infty[$.
3. Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ sur $]1; +\infty[$.
4. Déterminer deux réels α et β tels que, pour tout $x > 1$, $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{\alpha}{x - 1} + \frac{\beta}{x + 1}$. En déduire les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$ sur $]1; +\infty[$, puis celle dont la limite en $+\infty$ est nulle.