

Corrigé : Primitives et équations différentielles

Fiche Défi

D1.

1. Pour $y(x) = Ce^{ax}$, y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $y'(x) = aCe^{ax} = ay(x)$: y est solution.
2. y et $x \mapsto e^{-ax}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc g aussi, et

$$g'(x) = y'(x)e^{-ax} - ay(x)e^{-ax} = (y'(x) - ay(x))e^{-ax} = 0.$$

Comme $g' = 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$, g est constante, égale à un réel C . Donc $y(x)e^{-ax} = C$, soit $y(x) = Ce^{ax}$.

3. D'après 2, toute solution est de la forme Ce^{ax} . La condition $y(x_0) = y_0$ s'écrit $Ce^{ax_0} = y_0$, soit $C = y_0e^{-ax_0}$ (car $e^{ax_0} \neq 0$) : une seule valeur de C convient. La solution est $y(x) = y_0e^{a(x-x_0)}$; elle existe et elle est unique.
4. Si $C = 0$, y est la fonction nulle. Si $C \neq 0$, $y(x) = Ce^{ax} \neq 0$ pour tout x car une exponentielle ne s'annule pas.

5. Pour $z = y + \frac{b}{a}$: $z' = y' + \frac{b}{a}$ ($\frac{b}{a}$ est constant). Donc $y' = ay + b \iff z' = ay + b = a\left(y + \frac{b}{a}\right) = az$. Ainsi y est solution de $y' = ay + b$ si et seulement si z est solution de $z' = az$, c'est-à-dire $z(x) = Ce^{ax}$.

Conclusion : les solutions de $y' = ay + b$ sont $y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

6. $f'(x) = -3f(x) + 6$: $a = -3$, $b = 6$ et $-\frac{b}{a} = 2$. Donc $f(x) = Ce^{-3x} + 2$; $f(0) = C + 2 = 5$ donne $C = 3$. **Conclusion** : $f(x) = 3e^{-3x} + 2$.

D2.

1. $(G - F)' = g - f$ avec $F' = G' = f$: $(G - F)' = f - f = 0$ sur l'intervalle I . Donc $G - F$ est constante sur I .
2. Si F et G sont deux primitives de f telles que $F(x_0) = G(x_0) = y_0$, alors $G - F$ est constante (question 1) et nulle en x_0 , donc $G = F$: il y a au plus une primitive. Si f est continue sur I , elle admet une primitive F_0 (théorème admis). La fonction $F = F_0 + (y_0 - F_0(x_0))$ est une primitive de f (on ajoute une constante) et $F(x_0) = y_0$: il en existe une, donc exactement une.
3. Comme $y'_0 = ay_0 + f$, pour y dérivable sur $\mathbb{R}$: $y' = ay + f \iff y' - y'_0 = ay + f - (ay_0 + f) \iff (y - y_0)' = a(y - y_0)$. Donc y est solution de (E) si et seulement si $y - y_0$ est solution de $y' = ay$, c'est-à-dire $y - y_0 = Ce^{ax}$. **Conclusion** : les solutions de (E) sont $y(x) = Ce^{ax} + y_0(x)$, avec $C \in \mathbb{R}$.
4. a) $z = ye^x$ est dérivable et $z' = y'e^x + ye^x = (y' + y)e^x$. Donc $y' + y = xe^{-x} \iff (y' + y)e^x = x \iff z'(x) = x$ (on a multiplié par $e^x > 0$, ce qui est réversible).

- b) $z'(x) = x$ équivaut à $z(x) = \frac{x^2}{2} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$ (deux primitives diffèrent d'une constante).

Comme $y = ze^{-x}$, les solutions sont $y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x}$. La condition $y(0) = C = 1$ donne

$$C = 1. \text{ Conclusion : } y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)e^{-x}.$$

Vérification : $y'(x) + y(x) = xe^{-x} - \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)e^{-x} + \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)e^{-x} = xe^{-x}$.

D3.

1. h est dérivable et $h'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$ (car $f' = f$). Donc h est constante, égale à $h(0) = f(0)^2 = 1$. Ainsi $f(x)f(-x) = 1 \neq 0$ pour tout x : f ne s'annule jamais.
2. $k'(x) = g'(x)f(-x) - g(x)f'(-x) = g(x)f(-x) - g(x)f(-x) = 0$: k est constante, égale à $k(0) = 1$. Donc $g(x)f(-x) = 1 = f(x)f(-x)$. Comme $f(-x) \neq 0$, on obtient $g(x) = f(x)$.
3. Soit $\varphi(x) = \frac{f(x+y)}{f(y)}$ ($f(y) \neq 0$ et y fixé). φ est dérivable et $\varphi'(x) = \frac{f'(x+y)}{f(y)} = \frac{f(x+y)}{f(y)} = \varphi(x)$,

avec $\varphi(0) = \frac{f(y)}{f(y)} = 1$. D'après la question 2, $\varphi = f$, soit $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tout réel x (et y était quelconque).

4. $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0$, et $f(x) \neq 0$, donc $f(x) > 0$. Alors $f' = f > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
5. Initialisation : $f(0 \times x) = f(0) = 1 = (f(x))^0$. Hérédité : si $f(nx) = (f(x))^n$, alors $f((n+1)x) = f(nx+x) = f(nx)f(x) = (f(x))^{n+1}$. La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $x = 1$: $f(n) = (f(1))^n = e^n$: la fonction f prolonge la puissance de e , ce qui justifie la notation $f(x) = e^x$.

D4.

1. $f'_C(x) = 2Ce^{2x} + 2$ et $2f_C(x) - 4x + 2 = 2Ce^{2x} + 4x - 4x + 2 = 2Ce^{2x} + 2$: f_C est solution de (E). Réciproque : $y' = 2y - 4x + 2$ est de la forme $y' = ay + f$ avec $a = 2$ et $f(x) = -4x + 2$, et $y_0(x) = 2x$ est solution particulière (la vérification vient d'être faite avec $C = 0$). Les solutions sont donc $Ce^{2x} + 2x$, $C \in \mathbb{R}$.
2. $f'_C(x) = 2Ce^{2x} + 2$. Si $C \geq 0$: $f'_C(x) > 0$, f_C est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Si $C < 0$: $f'_C(x) > 0 \iff e^{2x} < -\frac{1}{C} \iff x < x_C = \frac{1}{2} \ln\left(-\frac{1}{C}\right)$. Donc f_C est strictement croissante sur $] -\infty; x_C]$ puis strictement décroissante sur $[x_C; +\infty[$. **Conclusion** : f_C est monotone sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $C \geq 0$.
3. a) $f_C(x) = 0 \iff Ce^{2x} = -2x \iff C = -2xe^{-2x} = \varphi(x)$ (on multiplie par $e^{-2x} > 0$).
- b) $\varphi'(x) = -2e^{-2x} + 4xe^{-2x} = (4x-2)e^{-2x}$, du signe de $4x-2$. Donc φ est décroissante sur $] -\infty; \frac{1}{2}]$, croissante sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$, avec $\varphi(\frac{1}{2}) = -e^{-1}$. En $-\infty$: $-2x \rightarrow +\infty$ et $e^{-2x} \rightarrow +\infty$, donc $\lim \varphi = +\infty$. En $+\infty$: en posant $X = 2x$, $\varphi(x) = -Xe^{-X} \rightarrow 0$ par croissances comparées.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	$+$
φ	$+\infty$	$-\frac{1}{e}$	0

- c) Les solutions de $f_C(x) = 0$ sont les antécédents de C par φ . Sur $] -\infty; \frac{1}{2}]$, φ est continue, strictement décroissante, de $+\infty$ à $-\frac{1}{e}$; sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$, elle est continue, strictement croissante, de $-\frac{1}{e}$ à 0 (valeur non atteinte). Par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

- $C < -\frac{1}{e}$: aucune solution ;
- $C = -\frac{1}{e}$: une solution, $x = \frac{1}{2}$;
- $-\frac{1}{e} < C < 0$: deux solutions (une dans chaque intervalle) ;
- $C \geq 0$: une seule solution (dans $] -\infty; \frac{1}{2}[$; pour $C = 0$, c'est $x = 0$).

4. $f_C(x) = e^{2x}(C + 2xe^{-2x}) = e^{2x}(C - \varphi(x))$. Pour $C = -\frac{1}{e}$, C est le minimum de φ , donc $C - \varphi(x) \leq 0$ et $f_C(x) \leq 0$ pour tout x . Graphiquement, la courbe est située sous l'axe des abscisses et le touche en un seul point, d'abscisse $\frac{1}{2}$ (elle y est tangente à l'axe, car $f'_C(\frac{1}{2}) = 0$).

D5.

1. a) f ne s'annule pas et est dérivable, donc $g = \frac{1}{f}$ aussi, et $g' = -\frac{f'}{f^2} = -\frac{f-f^2}{f^2} = -\frac{1}{f} + 1 = -g + 1$.
- b) $g' = -g + 1$: $a = -1$, $b = 1$, la constante 1 est solution. Donc $g(x) = Ce^{-x} + 1$. De $f(0) = \frac{1}{2}$,

on tire $g(0) = 2 = C + 1$, donc $C = 1$ et $g(x) = 1 + e^{-x}$. **Conclusion :** $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$.

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annule pas) et $f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$. Par ailleurs $f(x) - f(x)^2 = f(x)(1 - f(x)) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \times \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = f'(x)$. Donc f est solution de (E), et $f(0) = \frac{1}{2}$.
3. Limites : $\lim_{-\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim_{-\infty} f = 0$; $\lim_{+\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim_{+\infty} f = 1$. Comme $f'(x) > 0$, f est strictement croissante de 0 à 1. Tangente en 0 : $f(0) = \frac{1}{2}$, $f'(0) = \frac{1}{4}$, d'où $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$.
 $f(-x) = \frac{1}{1 + e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$, donc $f(x) + f(-x) = \frac{1 + e^{-x}}{1 + e^{-x}} = 1$. Graphiquement, la courbe est symétrique par rapport au point $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.
4. $f' = f - f^2 = \frac{1}{4} - \left(f - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$, avec égalité si et seulement si $f(x) = \frac{1}{2} \iff 1 + e^{-x} = 2 \iff x = 0$.
5. $f(x) > 0,9 \iff 1 + e^{-x} < \frac{10}{9} \iff e^{-x} < \frac{1}{9} \iff x > \ln 9 \approx 2,20$. **Conclusion :** plus de 90 % de la population est informée à partir de $x = \ln 9 \approx 2,20$ jours.

D6.

1. Ici $\omega = 2$: $x(t) = A \cos 2t + B \sin 2t$. $x(0) = A = 1$. $x'(t) = -2A \sin 2t + 2B \cos 2t$ et $x'(0) = 2B = 4$, donc $B = 2$. **Conclusion :** $x(t) = \cos 2t + 2 \sin 2t$.
2. Une primitive de v est $\cos 2t + 2 \sin 2t$ (car $(\cos 2t)' = -2 \sin 2t$ et $(2 \sin 2t)' = 4 \cos 2t$). Les primitives sont $\cos 2t + 2 \sin 2t + K$ et $x(0) = 1 + K = 1$ donne $K = 0$: on retrouve $x(t) = \cos 2t + 2 \sin 2t$.
3. $E'(t) = 2x'(t)x''(t) + 8x(t)x'(t) = 2x'(t)(x''(t) + 4x(t)) = 0$: E est constante, égale à $E(0) = 4^2 + 4 \times 1^2 = 20$. Alors $4x(t)^2 \leq E(t) = 20$, soit $x(t)^2 \leq 5$ et $|x(t)| \leq \sqrt{5}$.
4. La fonction cosinus est continue et strictement décroissante de 1 à 0 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, et $\frac{1}{\sqrt{5}} \in]0; 1[$: il existe un unique $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ avec $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. On pose $t_0 = \frac{\theta}{2} \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$. Comme $\sin \theta > 0$, $\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Alors $x(t_0) = \cos \theta + 2 \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$. Avec la question 3, $\sqrt{5}$ est la valeur maximale de $|x|$: c'est l'amplitude du mouvement (en cm).
5. $x(t + \pi) = \cos(2t + 2\pi) + 2 \sin(2t + 2\pi) = \cos 2t + 2 \sin 2t = x(t)$. Le nombre π (en s) est une période du mouvement : le mobile retrouve la même position et la même vitesse toutes les π secondes.

D7.

1. F est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $F'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$: F est une primitive de $\ln$.
2. $F'(x) = 2x(a \ln x + b) + x^2 \times \frac{a}{x} = 2ax \ln x + (2b + a)x$. On veut $F'(x) = x \ln x$ pour tout $x > 0$: $2a = 1$ et $2b + a = 0$. Donc $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{4}$: $F(x) = x^2 \left(\frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4}\right)$.
3. $\frac{1}{x \ln x} = \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \ln x$ et $u'(x) = \frac{1}{x}$. Sur $]1; +\infty[$, $u(x) > 0$: une primitive est $x \mapsto \ln(\ln x)$.
4. Pour $x > 1$, $\frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1} = \frac{(\alpha + \beta)x + \alpha - \beta}{x^2 - 1}$. On veut $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha - \beta = 1$: $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$. Sur $]1; +\infty[$, $x-1 > 0$ et $x+1 > 0$, donc les primitives sont $\frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \ln(x+1) + C = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} + C$.
Comme $\frac{x-1}{x+1} \rightarrow 1$ en $+\infty$, $\ln \frac{x-1}{x+1} \rightarrow 0$ et la limite de la primitive est C : elle est nulle si et seulement si $C = 0$. **Conclusion :** $G(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}$.