

Primitives et équations différentielles**Fiche Bases**

Nom : _____

Date : _____

Exercice B1 : Primitives usuelles

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$.
3. $h(x) = 3e^x - 2\cos x + \sin x$ sur $\mathbb{R}$.
4. $k(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$.
5. $r(x) = \frac{2}{x}$ sur $] -\infty; 0[$.

Exercice B2 : Reconnaître une forme composée

Pour chaque fonction, identifier u et u' , puis déterminer *une* primitive sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x) = (3x - 2)^4$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $h(x) = e^{2x+1}$ sur $\mathbb{R}$.
4. $k(x) = x^2 e^{x^3}$ sur $\mathbb{R}$.
5. $m(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$ sur $] -\frac{1}{2}; +\infty[$.
6. $n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ sur $\mathbb{R}$.
7. $p(x) = \frac{1}{2x-3}$ sur $] -\infty; \frac{3}{2}[$ (attention au signe de u).
8. $q(x) = 3\cos(2x-1)$ sur $\mathbb{R}$.
9. $r(x) = \sin(\pi x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice B3 : Vérifier une primitive, condition initiale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)e^x$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (x-2)e^x$.

1. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Donner toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la primitive G de f sur $\mathbb{R}$ telle que $G(0) = 3$.

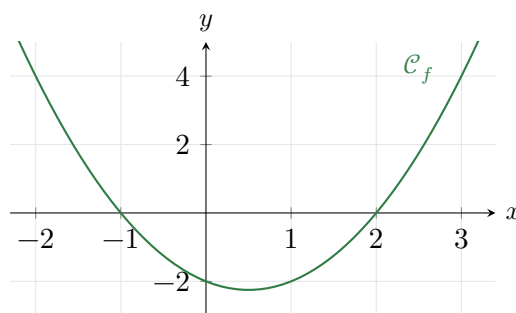
Exercice B4 : Vrai ou faux ?

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, et justifier (preuve ou contre-exemple).

1. Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $x \mapsto x^2 + 5$ est une primitive de $x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.
3. Si F est une primitive de f sur un intervalle I , alors F^2 est une primitive de f^2 sur I .
4. Si f est positive sur un intervalle I , toute primitive de f est croissante sur I .
5. Si F et G sont deux primitives de f sur un intervalle I , alors $F = G$.
6. La fonction $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice B5 : Variations d'une primitive

Soit $f(x) = x^2 - x - 2$. La courbe de f est donnée ci-dessous. Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$.



1. Lire sur la courbe le signe de f et en déduire les variations de F (sans calculer F).
2. Déterminer l'expression de $F(x)$.
3. Calculer $F(-2)$, $F(-1)$, $F(2)$ et $F(3)$, puis dresser le tableau de variations de F sur $[-2; 3]$.

Exercice B6 : L'équation $y' = ay$

Résoudre sur $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

1. $y' = 3y$.
2. $y' = -0,5y$.
3. $2y' + 6y = 0$.
4. $y' = 2y$ avec la condition $y(1) = 3$.
5. Soit y_1 et y_2 deux solutions de $y' = 3y$ sur $\mathbb{R}$ et λ un réel.
 - a) Montrer que $y_1 + y_2$ et λy_1 sont aussi solutions de $y' = 3y$.
 - b) Montrer que cette propriété est fautive pour l'équation $y' = 3y + 1$ (on pourra considérer la solution constante).

Exercice B7 : L'équation $y' = ay + b$

Pour chaque équation, la mettre sous la forme $y' = ay + b$, déterminer une solution constante, donner toutes les solutions sur $\mathbb{R}$, puis la solution vérifiant la condition initiale indiquée.

1. $y' = 2y + 6$ avec $y(0) = 1$.
2. $y' + 3y = 12$ avec $y(0) = 0$.
3. $2y' - y = 4$ avec $y(0) = -3$.

Exercice B8 : Équation avec second membre

1. On considère l'équation $(E_1) : y' = -2y + 6x + 1$.
 - a) Vérifier que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 3x - 1$ est solution de (E_1) .
 - b) Résoudre (E_1) sur $\mathbb{R}$.
 - c) Déterminer la solution y de (E_1) telle que $y(0) = 2$.
2. On considère l'équation $(E_2) : y' = y + e^{2x}$. Vérifier que $v(x) = e^{2x}$ est solution de (E_2) , puis résoudre (E_2) sur $\mathbb{R}$ et donner la solution qui s'annule en 0.

Exercice B9 : Méthode d'Euler

On considère l'équation $y' = -y + 3$ avec la condition $y(0) = 1$. On approche la solution par la méthode d'Euler de pas $h = 0,5$: $x_{k+1} = x_k + h$ et $y_{k+1} = y_k + h(-y_k + 3)$.

1. Calculer à la main y_1 , y_2 , y_3 et y_4 (approximations de $y(0,5)$, $y(1)$, $y(1,5)$, $y(2)$).
2. Résoudre l'équation avec la condition initiale. Calculer la valeur exacte de $y(2)$, puis son arrondi au millièmes. Quel est l'écart avec y_4 ?
3. Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie y_n , puis donner la valeur renvoyée par `euler(1, 0.5, 4)`.

```
def euler(y0, h, n):
    y = y0
```

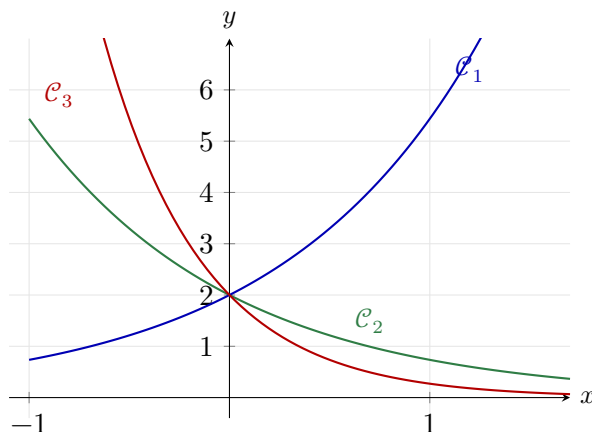
```

for k in range(n):
    y = .....
return y

```

Exercice B10 : Allure des courbes de solutions

Les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ ci-dessous représentent, dans un ordre à déterminer, les solutions sur $\mathbb{R}$ des trois problèmes suivants : $(P_1) : y' = y$ avec $y(0) = 2$; $(P_2) : y' = -y$ avec $y(0) = 2$; $(P_3) : y' = -2y$ avec $y(0) = 2$.



1. Sans calcul, quelle courbe correspond à (P_1) ? Justifier avec le signe de y' .
2. Résoudre (P_2) et (P_3) et calculer, pour chacun, la valeur de la solution en $x = 1$ (valeur exacte, puis arrondi au centième). En déduire, en s'appuyant sur la figure, la courbe associée à chacun de ces deux problèmes.
3. Montrer que les courbes de (P_2) et de (P_3) n'ont que le point $A(0; 2)$ en commun.
4. Pour chaque problème, donner l'équation de la tangente au point A à la courbe de la solution.