

Corrigé : Primitives et équations différentielles**Fiche Bases**

B1. Dans chaque cas, on utilise la linéarité et la table des primitives usuelles ; C désigne un réel quelconque.

1. $F(x) = x^5 - x^3 + 2x + C$.
2. Sur $]0; +\infty[$, une primitive de $\frac{3}{x^2}$ est $-\frac{3}{x}$ et une primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln x$. Donc $G(x) = -\frac{3}{x} + \ln x + C$.
3. $H(x) = 3e^x - 2 \sin x - \cos x + C$.
4. Une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est $2\sqrt{x}$, donc une primitive de $\frac{4}{\sqrt{x}}$ est $8\sqrt{x}$. Comme $\sqrt{x} = x^{1/2}$, une primitive de $\sqrt{x}$ est $\frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$. Donc $K(x) = 8\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$.
5. Sur $] -\infty; 0[$, une primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln(-x)$ (dérivée : $\frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$). Donc $R(x) = 2 \ln(-x) + C$.

Conclusion : les primitives sont les fonctions F, G, H, K ci-dessus, avec $C \in \mathbb{R}$.

B2.

1. f est de la forme u^4 avec $u(x) = 3x - 2$ et $u'(x) = 3$: $f(x) = \frac{1}{3} \times 3 (3x - 2)^4 = \frac{1}{3} u' u^4$. Une primitive est $F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{(3x - 2)^5}{5} = \frac{(3x - 2)^5}{15}$.
2. $g = \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 4 > 0$ et $u'(x) = 2x$. Une primitive est $G(x) = \ln(x^2 + 4)$.
3. $h = \frac{1}{2} \times 2e^{2x+1} = \frac{1}{2} u' e^u$ avec $u(x) = 2x + 1$ et $u'(x) = 2$. Une primitive est $H(x) = \frac{1}{2} e^{2x+1}$.
4. $k = \frac{1}{3} \times 3x^2 e^{x^3} = \frac{1}{3} u' e^u$ avec $u(x) = x^3$ et $u'(x) = 3x^2$. Une primitive est $K(x) = \frac{1}{3} e^{x^3}$.
5. $m = \frac{1}{2} \times \frac{2}{(2x+1)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 2x + 1 > 0$ sur l'intervalle et $u'(x) = 2$. Une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ est $-\frac{1}{u}$, donc $M(x) = -\frac{1}{2(2x+1)}$.
6. $n = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^2 + 9 > 0$ et $u'(x) = 2x$. Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$, donc $N(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2+9} = \sqrt{x^2+9}$.
7. $p = \frac{1}{2} \times \frac{2}{2x-3} = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 2x - 3$ et $u'(x) = 2$. Sur $] -\infty; \frac{3}{2}[$, $u(x) < 0$: une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln(-u)$, donc $P(x) = \frac{1}{2} \ln(3 - 2x)$.
8. $q = \frac{3}{2} \times 2 \cos(2x - 1) = \frac{3}{2} u' \cos u$ avec $u(x) = 2x - 1$ et $u'(x) = 2$. Une primitive de $u' \cos u$ est $\sin u$, donc $Q(x) = \frac{3}{2} \sin(2x - 1)$.
9. $r = \frac{1}{\pi} \times \pi \sin(\pi x) = \frac{1}{\pi} u' \sin u$ avec $u(x) = \pi x$ et $u'(x) = \pi$. Une primitive de $u' \sin u$ est $-\cos u$, donc $R(x) = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x)$.

Vérifications : $N'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} = n(x)$; $P'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-2}{3-2x} = \frac{1}{2x-3} = p(x)$; $Q'(x) = \frac{3}{2} \times 2 \cos(2x - 1) = q(x)$; $R'(x) = -\frac{1}{\pi} \times (-\pi \sin(\pi x)) = r(x)$.

B3.

1. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et, pour tout réel x : $F'(x) = e^x + (x - 2)e^x = (x - 1)e^x = f(x)$. Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto (x - 2)e^x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

3. $G(x) = (x-2)e^x + C$ et $G(0) = -2 + C = 3$, donc $C = 5$.

Conclusion : $G(x) = (x-2)e^x + 5$.

B4.

1. **Vrai.** Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle (théorème admis du cours).
2. **Vrai.** La fonction $x \mapsto x^2 + 5$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto 2x$.
3. **Faux.** Contre-exemple : $f(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$, $F(x) = x$. Alors $F^2(x) = x^2$ a pour dérivée $2x \neq 1 = f^2(x)$.
4. **Vrai.** Si $F' = f \geq 0$ sur l'intervalle I , alors F est croissante sur I .
5. **Faux.** Deux primitives diffèrent d'une constante, pas forcément nulle : $F(x) = x$ et $G(x) = x + 1$ sont deux primitives de $x \mapsto 1$ et $F \neq G$.
6. **Faux.** La dérivée de $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ est $x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 1}$, qui est différente de $\frac{1}{x^2 + 1}$ (par exemple en $x = 1 : 1$ contre $\frac{1}{2}$).

B5.

1. La courbe coupe l'axe des abscisses en -1 et 2 : $f(x) = (x+1)(x-2)$. On lit $f > 0$ sur $] -\infty ; -1[$ et sur $]2 ; +\infty[$, et $f < 0$ sur $] -1 ; 2[$. Comme $F' = f$, la fonction F est croissante sur $] -\infty ; -1]$, décroissante sur $[-1 ; 2]$ et croissante sur $[2 ; +\infty[$.
2. Les primitives de f sont $x \mapsto \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C$. La condition $F(0) = 0$ donne $C = 0$. Donc $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$.
3. $F(-2) = -\frac{8}{3} - 2 + 4 = -\frac{2}{3}$; $F(-1) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{6}$; $F(2) = \frac{8}{3} - 2 - 4 = -\frac{10}{3}$; $F(3) = 9 - \frac{9}{2} - 6 = -\frac{3}{2}$.

x	-2	-1	2	3	
$F'(x) = f(x)$	+	0	-	0	+
F	$-\frac{2}{3}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{3}{2}$	

Conclusion : F admet un maximum local $\frac{7}{6}$ en -1 et un minimum local $-\frac{10}{3}$ en 2 .

B6.

1. Les solutions sont $y(x) = Ce^{3x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.
2. Les solutions sont $y(x) = Ce^{-0,5x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.
3. $2y' + 6y = 0 \iff y' = -3y$. Les solutions sont $y(x) = Ce^{-3x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.
4. Les solutions de $y' = 2y$ sont $y(x) = Ce^{2x}$. La condition $y(1) = 3$ donne $Ce^2 = 3$, soit $C = 3e^{-2}$. Donc $y(x) = 3e^{-2}e^{2x} = 3e^{2x-2}$.
5. a) $(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2' = 3y_1 + 3y_2 = 3(y_1 + y_2)$ et $(\lambda y_1)' = \lambda y_1' = \lambda \times 3y_1 = 3(\lambda y_1)$. Donc $y_1 + y_2$ et λy_1 sont solutions de $y' = 3y$: les solutions de $y' = ay$ forment un ensemble stable par somme et par multiplication par un réel.
 b) La fonction constante $y_1 = -\frac{1}{3}$ est solution de $y' = 3y + 1$ (car $0 = 3 \times (-\frac{1}{3}) + 1$). Pour $y_1 + y_1 = -\frac{2}{3}$: $(y_1 + y_1)' = 0$ alors que $3 \times (-\frac{2}{3}) + 1 = -1$. Donc $y_1 + y_1$ n'est pas solution.

B7.

1. L'équation est $y' = ay + b$ avec $a = 2$ et $b = 6$. La constante $-\frac{b}{a} = -3$ est solution ($2 \times (-3) + 6 = 0$).

Solutions : $y(x) = Ce^{2x} - 3$. Avec $y(0) = 1 : C - 3 = 1$, donc $C = 4$. **Conclusion :** $y(x) = 4e^{2x} - 3$.

2. $y' + 3y = 12 \iff y' = -3y + 12 : a = -3, b = 12$. La constante $-\frac{b}{a} = 4$ est solution ($-3 \times 4 + 12 = 0$).

Solutions : $y(x) = Ce^{-3x} + 4$. Avec $y(0) = 0 : C + 4 = 0$, donc $C = -4$. **Conclusion :** $y(x) = 4 - 4e^{-3x}$.

3. $2y' - y = 4 \iff y' = \frac{1}{2}y + 2 : a = \frac{1}{2}, b = 2$. La constante $-\frac{b}{a} = -4$ est solution ($\frac{1}{2} \times (-4) + 2 = 0$).

Solutions : $y(x) = Ce^{x/2} - 4$. Avec $y(0) = -3 : C - 4 = -3$, donc $C = 1$. **Conclusion :** $y(x) = e^{x/2} - 4$.

B8.

1. a) u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 3$. Or $-2u(x) + 6x + 1 = -6x + 2 + 6x + 1 = 3$. Donc $u' = -2u + 6x + 1 : u$ est solution de (E_1) .
 b) Les solutions de l'équation homogène $y' = -2y$ sont Ce^{-2x} . Comme u est une solution particulière, les solutions de (E_1) sont $y(x) = Ce^{-2x} + 3x - 1$, avec $C \in \mathbb{R}$.
 c) $y(0) = C - 1 = 2$, donc $C = 3$. Conclusion : $y(x) = 3e^{-2x} + 3x - 1$.
2. $v'(x) = 2e^{2x}$ et $v(x) + e^{2x} = 2e^{2x} : v$ est solution de (E_2) . Les solutions de $y' = y$ sont Ce^x , donc les solutions de (E_2) sont $y(x) = Ce^x + e^{2x}$. La condition $y(0) = 0$ donne $C + 1 = 0$, soit $C = -1$. Conclusion : $y(x) = e^{2x} - e^x$.

B9.

1. $y_{k+1} = y_k + 0,5(-y_k + 3) = 0,5y_k + 1,5$. Donc $y_1 = 0,5 \times 1 + 1,5 = 2$, $y_2 = 2,5$, $y_3 = 2,75$ et $y_4 = 2,875$.
2. $y' = -y + 3 : a = -1, b = 3$, la constante 3 est solution. Solutions : $y(x) = Ce^{-x} + 3$. Avec $y(0) = 1 : C = -2$. Donc $y(x) = 3 - 2e^{-x}$ et $y(2) = 3 - 2e^{-2} \approx 2,729$. L'écart avec y_4 est $2,875 - 2,729 \approx 0,146$: l'approximation est par excès.
3. La ligne manquante est $y = y + h * (-y + 3)$.

```
def euler(y0, h, n):
    y = y0
    for k in range(n):
        y = y + h * (-y + 3)
    return y
```

L'appel `euler(1, 0.5, 4)` renvoie 2.875, valeur de y_4 trouvée à la main.

B10.

1. Pour (P_1) , $y' = y$ et $y(0) = 2 > 0$: la solution $y(x) = 2e^x$ est strictement positive, donc $y' > 0$ et la solution est croissante. Seule $\mathcal{C}_1$ est croissante : $\mathcal{C}_1$ correspond à (P_1) .
2. $(P_2) : y(x) = 2e^{-x}$, donc $y(1) = \frac{2}{e} \approx 0,74$. $(P_3) : y(x) = 2e^{-2x}$, donc $y(1) = \frac{2}{e^2} \approx 0,27$. Sur la figure, au point d'abscisse 1, $\mathcal{C}_2$ est à l'ordonnée environ 0,74 et $\mathcal{C}_3$ à l'ordonnée environ 0,27. Donc $\mathcal{C}_2$ correspond à (P_2) et $\mathcal{C}_3$ à (P_3) : plus a est négatif, plus la décroissance est rapide.
3. $2e^{-x} = 2e^{-2x} \iff e^{-x} = e^{-2x} \iff -x = -2x \iff x = 0$. Le seul point commun est $A(0; 2)$.
4. La tangente en A a pour équation $y = y'(0)x + y(0)$ avec $y'(0) = ay(0) = 2a$: pour (P_1) , $y = 2x + 2$; pour (P_2) , $y = -2x + 2$; pour (P_3) , $y = -4x + 2$.

Conclusion : $\mathcal{C}_1 : (P_1) ; \mathcal{C}_2 : (P_2) ; \mathcal{C}_3 : (P_3)$.