

Fiche 4 : fonctions solutions et démonstrations classiques

Sept exercices qui mêlent équations différentielles et études de fonctions :

- fonction solution avec condition initiale ;
- variations, limites, asymptotes, convexité ;
- inégalités qui en découlent ;
- primitive d'un produit ;
- caractérisation de l'exponentielle (démonstration classique) ;
- méthode d'Euler avec Python ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- équation résolue en entier ;
- fonction étudiée avec dérivée factorisée ;
- limites justifiées ;
- tableau ;
- conclusion.

Le plan quand une fonction est « donnée par une équation différentielle »

1. **Résous l'équation** et détermine la fonction avec sa condition initiale.
2. Étudie-la comme n'importe quelle fonction : **limites, dérivée, signe, tableau**.
3. **Utilise l'équation elle-même** pour simplifier : $f' = af + b$ permet de lire f' à partir de f .
4. Dédus des **inégalités** et des **asymptotes** de l'étude.

Les pièges classiques

- Étudier la fonction **avant** d'avoir déterminé C avec la condition initiale.
- Oublier de citer l'équation quand elle donne directement $f'(0)$ (tangente).
- Conclure à une asymptote sans écrire la **limite de $f(x) - (ax + b)$** .
- Dans une démonstration, oublier de vérifier la **condition initiale**.

Quand une équation différentielle te donne f' gratuitement, ne la rends pas : elle est comme un code promo, à utiliser au moins une fois par exercice.

Exercice 1 (★★★) : une solution qui tend vers une asymptote

Soit f la solution de $y' = -y + 2$ vérifiant $f(0) = 0$.

1. Déterminer f .
2. Étudier ses variations et ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Étudier sa convexité et déterminer la tangente en 0.
4. En déduire que, pour tout réel x , $e^{-x} \geq 1 - x$.

Correction de l'exercice 1

Question 1

$a = -1$, $b = 2$, $-\frac{b}{a} = 2$. Solutions : $y(x) = Ce^{-x} + 2$. $f(0) = C + 2 = 0$, donc $C = -2$.

$$f(x) = 2 - 2e^{-x}$$

Question 2

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2e^{-x} > 0$.

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

En $+\infty$, $e^{-x} \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 2$$

La droite $y = 2$ est asymptote horizontale, et $f(x) < 2$ pour tout x .

En $-\infty$, $-x \rightarrow +\infty$, donc $e^{-x} \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$$

Question 3

$$f''(x) = -2e^{-x} < 0$$

f est concave sur $\mathbb{R}$.

La tangente en 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)x = 0 + 2x$.

$$y = 2x$$

Question 4

Comme f est concave, sa courbe est en dessous de sa tangente. $f(x) \leq 2x$ pour tout x , soit $2 - 2e^{-x} \leq 2x$. Donc $e^{-x} \geq 1 - x$.

Pour tout réel x , $e^{-x} \geq 1 - x$.

Exercice 2 (★★★) : retrouver l'inégalité $e^x \geq x + 1$

Soit f la solution de $y' = y - x$ vérifiant $f(0) = 0$.

Chercher une solution particulière de la forme $y_0(x) = px + q$, puis déterminer f . Étudier f et en déduire que $e^x \geq x + 1$ pour tout x .

Correction de l'exercice 2**Solution particulière**

$y'_0 = p$ et $y_0 - x = (p - 1)x + q$. L'égalité $y'_0 = y_0 - x$ pour tout x impose $p - 1 = 0$ et $p = q$, donc $p = q = 1$.

$$y_0(x) = x + 1$$

La fonction f

Les solutions de $y' = y$ sont Ce^x . Donc les solutions sont $y(x) = Ce^x + x + 1$. $f(0) = C + 1 = 0$, donc $C = -1$.

$$f(x) = x + 1 - e^x$$

Étude

$f'(x) = 1 - e^x$. Positif si $x < 0$, négatif si $x > 0$ (car $e^x > 1 \iff x > 0$). Donc f est strictement croissante sur $] -\infty ; 0]$ et strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$. Elle admet un maximum en 0 : $f(0) = 0$.

En $-\infty$: $f(x) - (x + 1) = -e^x \rightarrow 0$. La droite $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe en $-\infty$.

En $+\infty$: $f(x) = -e^x(1 - (x + 1)e^{-x})$. Avec $(x + 1)e^{-x} \rightarrow 0$ (croissances comparées), $f(x) \rightarrow -\infty$.

L'inégalité

Le maximum de f est 0 : $f(x) \leq 0$ pour tout x . Soit $x + 1 - e^x \leq 0$.

$e^x \geq x + 1$ pour tout réel x .

Exercice 3 (★★★) : une solution, son minimum et son asymptote

Soit f la solution de $y' + y = x$ vérifiant $f(0) = 1$.

1. Chercher une solution particulière de la forme $px + q$, puis déterminer f .
2. Étudier les variations et les limites de f . Déterminer son minimum.
3. Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe en $+\infty$ et étudier la position relative.
4. En déduire que $f(x) > 0$ pour tout x .

Correction de l'exercice 3

Question 1

L'équation s'écrit $y' = -y + x$. Avec $y_0(x) = px + q$: $p = -px - q + x$, soit $(1 - p)x - q - p = 0$ pour tout x . Donc $p = 1$ et $q = -p = -1$.

$$y_0(x) = x - 1$$

Les solutions de $y' = -y$ sont Ce^{-x} . Donc $y(x) = Ce^{-x} + x - 1$. $f(0) = C - 1 = 1$, donc $C = 2$.

$$f(x) = 2e^{-x} + x - 1$$

Question 2

$f'(x) = -2e^{-x} + 1$. $f'(x) > 0 \iff e^{-x} < \frac{1}{2} \iff -x < -\ln 2 \iff x > \ln 2$. Donc f est strictement décroissante sur $] -\infty ; \ln 2]$ et strictement croissante sur $[\ln 2 ; +\infty[$.

Son minimum est $f(\ln 2) = 2 \times \frac{1}{2} + \ln 2 - 1$.

$$f(\ln 2) = \ln 2 \approx 0,69$$

En $-\infty$: $2e^{-x} \rightarrow +\infty$ et $x - 1 \rightarrow -\infty$. On écrit $f(x) = e^{-x} (2 + (x - 1)e^x)$. Avec $(x - 1)e^x \rightarrow 0$ (croissances comparées) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$$

En $+\infty$: $2e^{-x} \rightarrow 0$ et $x - 1 \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$$

Question 3

$$f(x) - (x - 1) = 2e^{-x} \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

La droite $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$.

Comme $2e^{-x} > 0$, la courbe est au-dessus de cette droite sur $\mathbb{R}$.

Question 4

Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est $\ln 2 > 0$.

Donc $f(x) > 0$ pour tout réel x .

Exercice 4 (★★★) : une primitive d'un produit et son application

1. Montrer que $F(x) = -(2x + 3)e^{-x}$ est une primitive de $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la primitive G de f qui s'annule en 0.
3. Étudier les variations de G et sa limite en $+\infty$.

Correction de l'exercice 4

Question 1

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit. $F'(x) = -2e^{-x} + (2x + 3)e^{-x} = (2x + 1)e^{-x} = f(x)$.

F est une primitive de f .

Question 2

Les primitives de f sont $F(x) + C$. $G(0) = F(0) + C = -3 + C = 0$, donc $C = 3$.

$$G(x) = 3 - (2x + 3)e^{-x}$$

Question 3

$G' = f$ et $e^{-x} > 0$. Donc $G'(x)$ est du signe de $2x + 1$. $G' < 0$ sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$ et $G' > 0$ sur $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

G est strictement décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$ et strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

En $+\infty$, par croissances comparées, $(2x + 3)e^{-x} \rightarrow 0$.

$$\lim G = 3$$

La droite $y = 3$ est asymptote horizontale.

Exercice 5 (★★★) : caractériser l'exponentielle

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

1. On pose $g(x) = f(x)f(-x)$. Montrer que g est constante et que f ne s'annule jamais.
2. Montrer que $f(x) = e^x$ pour tout x .
3. Pour y fixé, montrer que $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tout x .

Correction de l'exercice 5

Question 1

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit.

$$g'(x) = f'(x)f(-x) + f(x) \times (-f'(-x)) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$$

(car $f' = f$).

Donc g est constante, égale à $g(0) = f(0)^2 = 1$. Ainsi $f(x)f(-x) = 1$ pour tout x .

$f(x) \neq 0$ pour tout x .

Question 2

Comme $f' = f$, le théorème sur $y' = ay$ avec $a = 1$ donne $f(x) = Ce^x$. $f(0) = C = 1$.

Donc $f(x) = e^x$.

(C'est l'unicité de la fonction exponentielle.)

Question 3

Soit y fixé, et $h(x) = \frac{f(x+y)}{f(y)}$. ($f(y) \neq 0$ d'après la question 1.)

h est dérivable et $h'(x) = \frac{f'(x+y)}{f(y)} = \frac{f(x+y)}{f(y)} = h(x)$. De plus $h(0) = \frac{f(y)}{f(y)} = 1$.

D'après l'unicité (question 2), $h = f$. Donc $\frac{f(x+y)}{f(y)} = f(x)$.

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

On retrouve la propriété fondamentale : $e^{x+y} = e^x e^y$.

Exercice 6 (★★) : la méthode d'Euler avec Python

Pour approcher la solution de $y' = f(y)$ avec $y(0) = y_0$, la méthode d'Euler de pas h construit $y_{k+1} = y_k + h f(y_k)$. On l'applique à $y' = -y$ et $y(0) = 1$, dont la solution exacte est e^{-x} .

1. Écrire une fonction Python `euler(h, n)` qui renvoie y_n .
2. Calculer y_{10} pour $h = 0,1$ et y_{100} pour $h = 0,01$, et comparer avec $e^{-1} \approx 0,3679$.

Correction de l'exercice 6

Question 1

```
def euler(h, n):
    y = 1
    for k in range(n):
        y = y + h*(-y)
    return y
```

Comme $y_{k+1} = y_k(1 - h)$, la suite (y_k) est géométrique de raison $1 - h$.

$$y_n = (1 - h)^n$$

Question 2

Pour $h = 0,1$ et $n = 10$: $y_{10} = 0,9^{10} \approx 0,3487$.

Pour $h = 0,01$ et $n = 100$: $y_{100} = 0,99^{100} \approx 0,3660$.

Ces deux valeurs approchent $y(1) = e^{-1} \approx 0,3679$. L'écart est d'environ 0,019 pour $h = 0,1$ et 0,0019 pour $h = 0,01$.

L'erreur est divisée par 10 quand le pas est divisé par 10 : c'est la méthode d'Euler, d'ordre 1.

Exercice 7 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. La fonction $x \mapsto e^x - x$ est solution de $y' = y + x$.
2. Toute solution de $y' = -y + 2$ tend vers 2 en $+\infty$.
3. Il existe une solution de $y' = y$ qui prend la valeur 0 en 0 et la valeur 1 en 1.
4. Si f est solution de $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) et si $f'(x_0) = 0$, alors $f(x_0) = -\frac{b}{a}$.

Correction de l'exercice 7

Affirmation 1

Pour $y(x) = e^x - x$: $y'(x) = e^x - 1$ et $y(x) + x = e^x$. Ces deux expressions diffèrent de 1 pour tout x , donc y n'est pas solution. (La fonction $e^x - x - 1$ est, elle, solution de cette équation.)

Faux.

Affirmation 2

Les solutions sont $Ce^{-x} + 2$. Elles tendent vers 2 quand $x \rightarrow +\infty$.

Vrai.

Affirmation 3

Les solutions de $y' = y$ sont Ce^x . Si $y(0) = 0$, alors $C = 0$ et y est nulle : $y(1) = 0 \neq 1$.

Faux.

Affirmation 4

$f'(x_0) = af(x_0) + b = 0$ donne $f(x_0) = -\frac{b}{a}$.

Vrai.

Ce qui peut tomber au bac

- Une **fonction définie comme solution** d'une équation différentielle, à étudier entièrement (exercices 1, 2, 3).
- Une **primitive d'un produit** vérifiée, puis une fonction définie par cette primitive (exercice 4).
- La **démonstration** des propriétés de l'exponentielle à partir de $f' = f$ (exercice 5).
- La **méthode d'Euler** avec un script Python (exercice 6).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. La solution de $y' = -y + 2$ s'écrit $y = Ce^{-x} + 2$. Avec $y(0) = 5$, que vaut C ?

- A. 2
- B. 7
- C. 3 (bonne réponse)
- D. 5

Justification : $y(0) = C + 2 = 5$, donc $C = 3$.

2. Quelle est la limite en $+\infty$ de $f(x) = 3e^{-x} + 2$?

A. $+\infty$

B. 0

C. 2 (bonne réponse)

D. 3

Justification : $e^{-x} \rightarrow 0$ en $+\infty$, donc $f(x) \rightarrow 2$: la droite $y = 2$ est asymptote.

3. Que peut-on dire du sens de variation de $f(x) = 3e^{-x} + 2$?

A. f est strictement décroissante (bonne réponse)B. f est croissante puis décroissanteC. f est strictement croissanteD. f est constante

Justification : $f'(x) = -3e^{-x} < 0$ pour tout réel x .

4. La solution de $y' = 0,5y + 1$ s'écrit $y = Ce^{0,5x} - 2$. Avec $y(0) = 0$, que vaut C ?

A. 2 (bonne réponse)

B. 0

C. 1

D. -2

Justification : $y(0) = C - 2 = 0$, donc $C = 2$.

5. Une équation $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$ et une condition initiale $y(x_0) = y_0$ admet :

A. une unique solution (bonne réponse)

B. aucune solution

C. deux solutions

D. une infinité de solutions

Justification : La condition initiale fixe la constante C : la solution est unique.

6. Dans l'exercice 1, avec f solution de $y' = -y + 2$ et $f(0) = 0$, quelle inégalité en déduit-on pour tout réel x ?

A. $e^{-x} = 1 - x$ B. $e^{-x} \geq x - 1$ C. $e^{-x} \geq 1 - x$ (bonne réponse)D. $e^{-x} \leq 1 - x$

Justification : $f(x) = 2 - 2e^{-x}$ est concave, sa courbe est sous sa tangente $y = 2x$ en 0 : $2 - 2e^{-x} \leq 2x$, ce qui donne $e^{-x} \geq 1 - x$.

7. Dans l'exercice 2, quelle solution particulière $y_0(x) = px + q$ cherche-t-on pour $y' = y - x$?

A. $y_0(x) = x - 1$ B. $y_0(x) = x$

C. $y_0(x) = x + 1$ (**bonne réponse**)

D. $y_0(x) = -x - 1$

Justification : $y'_0 = p$ et $y_0 - x = (p - 1)x + q$; on identifie $p = (p - 1)x + q$, ce qui donne $p = 1$ et $q = 1$.

8. Dans l'exercice 3, avec f solution de $y' + y = x$ et $f(0) = 1$, quel est le minimum de f ?

A. -1

B. $\ln 2$, atteint en $x = \ln 2$ (**bonne réponse**)

C. 1

D. 0

Justification : $f(x) = 2e^{-x} + x - 1$, $f'(x) = -2e^{-x} + 1$ s'annule en $x = \ln 2$, où $f(\ln 2) = 1 + \ln 2 - 1 = \ln 2$.

9. Dans l'exercice 5 (caractérisation de l'exponentielle), en posant $g(x) = f(x)f(-x)$ avec $f' = f$ et $f(0) = 1$, que montre-t-on ?

A. g est constante, donc f ne s'annule jamais (**bonne réponse**)

B. g est croissante

C. $g(x) = 0$ pour tout x

D. f s'annule en 0

Justification : $g'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$: g est constante, égale à $g(0) = f(0)^2 = 1 \neq 0$.

10. Dans l'exercice 6 (méthode d'Euler pour $y' = -y$, $y(0) = 1$), quelle est l'expression de y_n en fonction du pas h ?

A. $y_n = e^{-nh}$

B. $y_n = (1 - h)^n$ (**bonne réponse**)

C. $y_n = (1 + h)^n$

D. $y_n = 1 - nh$

Justification : Chaque étape applique $y_{k+1} = y_k + h \times (-y_k) = (1 - h)y_k$: après n étapes, $y_n = (1 - h)^n$.