

Fiche 3 : l'équation $y' = ay + f$ et la modélisation

Dix exercices :

- équations avec second membre (polynôme, exponentielle, cas de résonance, cosinus) ;
- les problèmes de modélisation classiques du bac : refroidissement de Newton, radioactivité, chute avec frottement, population avec prélèvement, charge d'un condensateur ;
- l'oscillateur $y'' + \omega^2 y = 0$ en complément.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- équation réduite ;
- solution particulière cherchée sous une forme justifiée et vérifiée ;
- solution générale ;
- condition initiale ;
- interprétation avec les unités.

Le modèle de rédaction avec second membre

« On cherche une solution particulière de la forme $y_0(x) = px + q$.

Alors $y'_0 = p$, et $y'_0 = y_0 + 2x$ équivaut à $p = (p + 2)x + q$ pour tout x .

On identifie : $p + 2 = 0$ et $p = q$, donc $p = q = -2$.

Les solutions de $y' = y$ sont Ce^x .

Les solutions de l'équation sont donc $y(x) = Ce^x - 2x - 2$, avec $C \in \mathbb{R}$. »

- Cherche y_0 de la même forme que le second membre (polynôme du même degré, exponentielle, combinaison de **cos** et **sin**).
- Cas de **résonance** : si le second membre est ke^{ax} , cherche $cx e^{ax}$.
- Solution générale = $Ce^{ax} + y_0(x)$, puis condition initiale.

Les pièges classiques

- Oublier de vérifier la solution particulière dans l'équation.
- Chercher $y_0 = ce^{ax}$ quand le second membre est déjà e^{ax} : il faut $cx e^{ax}$.
- Appliquer la condition initiale à y_0 seule au lieu de la solution générale.
- Donner un résultat de modélisation **sans unité** ni interprétation.

Une solution particulière, c'est comme une clé de secours : tu la cherches parmi celles qui ressemblent à la serrure (le second membre), pas au hasard.

Exercice 1 (★★) : second membre polynomial

On considère $(E) : y' = y + 2x$.

Chercher une solution particulière de la forme $y_0(x) = px + q$. Résoudre (E) . Déterminer la solution vérifiant $y(0) = 0$.

Exercice 2 (★★) : un autre second membre polynomial

Résoudre $(E) : y' = 2y + 3x$. Donner la solution vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 3 (★★) : second membre exponentiel, dont la résonance

Résoudre :

(a) $y' + y = e^{-x}$

(b) $y' - 2y = e^x$

Pour (b), donner la solution vérifiant $y(0) = 0$.

Exercice 4 (★★★) : second membre trigonométrique

Résoudre $(E) : y' + 2y = \cos x$. On cherchera une solution particulière de la forme $y_0(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$.

Exercice 5 (★★) : le refroidissement de Newton

Un café à 90°C est posé dans une pièce à 20°C . La température $T(t)$, en $^\circ\text{C}$, à l'instant t (en minutes), vérifie $T' = -0,1(T - 20)$ et $T(0) = 90$.

1. Écrire l'équation sous la forme $T' = aT + b$ et la résoudre avec la condition initiale.
2. Calculer $T(10)$. Déterminer la limite de T en $+\infty$ et l'interpréter.
3. À quel instant le café atteint-il 40°C ?

Exercice 6 (★★) : la radioactivité

Le nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs d'un échantillon, à l'instant t (en années), vérifie $N' = -0,05 N$, avec $N(0) = N_0$.

1. Exprimer $N(t)$.
2. Déterminer la demi-vie $t_{1/2}$, c'est-à-dire l'instant où $N(t) = \frac{N_0}{2}$.
3. Au bout de combien de temps il ne reste que 10 % des noyaux initiaux ?

Exercice 7 (★★★) : la chute avec frottement

La vitesse $v(t)$ (en m/s) d'un objet en chute vérifie $v' = 10 - 0,5 v$ et $v(0) = 0$.

1. Déterminer $v(t)$.
2. Déterminer la vitesse limite.
3. À quel instant l'objet atteint-il 90 % de sa vitesse limite ?

Exercice 8 (★★★) : une population avec prélèvement

Une population de poissons, exprimée en milliers, croît de 5 % par an. 2 000 poissons sont pêchés chaque année. Le modèle est $P' = 0,05 P - 2$, où t est en années.

1. Déterminer la solution constante et la solution générale.
2. Étudier P si $P(0) = 50$, puis si $P(0) = 30$. Que se passe-t-il dans chaque cas ?

Exercice 9 (★★) : la charge d'un condensateur

Un condensateur est chargé par une source de tension $E = 6$ V à travers une résistance, avec $RC = 2$ s. La tension $u(t)$ à ses bornes vérifie $u' = \frac{E - u}{RC}$, avec $u(0) = 0$.

1. Déterminer $u(t)$.
2. Calculer $u(2)$ et la limite de u en $+\infty$.
3. À quel instant la tension atteint-elle 5 V ?

Exercice 10 (★★★) : l'oscillateur $y'' + \omega^2 y = 0$ (complément)

On admet que les solutions de $y'' + 4y = 0$ sont les fonctions $y(x) = A \cos 2x + B \sin 2x$.

Déterminer la solution vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$. Puis écrire cette solution sous la forme $R \cos(2x - \varphi)$.

Ce qui peut tomber au bac

- Une **équation avec second membre** dont l'énoncé donne la forme de la solution particulière (exercices 1 à 4).
- Un **problème de refroidissement** ou de **décroissance** avec interprétation (exercices 5 et 6).
- Un **problème de vitesse limite** ou de **charge d'un condensateur** (exercices 7 et 9).
- Un **modèle de population** avec prélèvement (exercice 8).
- L'**oscillateur** $y'' + \omega^2 y = 0$ dans certains sujets (exercice 10).

QCM : une seule bonne réponse par question

- Quelle fonction est une solution particulière de $y' = y + x$?
 - $y = -x + 1$
 - $y = x - 1$
 - $y = -x - 1$
 - $y = x + 1$
- Quelles sont toutes les solutions de $y' = y + x$?
 - $y = Ce^x + x + 1$
 - $y = Ce^x - x - 1$
 - $y = Ce^x - x + 1$
 - $y = Ce^{-x} - x - 1$
- Pour $T' = -k(T - T_e)$ avec $k > 0$, la température T tend vers :
 - la température extérieure T_e
 - la température initiale
 - 0
 - $+\infty$
- Pour $y' - 3y = e^{2x}$, on cherche une solution $y = ke^{2x}$. Quelle valeur de k ?
 - 1
 - 1

C. $\frac{1}{5}$

D. $-\frac{1}{5}$

5. Une population vérifie $P' = 0,03 P$ avec $P(0) = P_0$. Alors :
- A. $P(t) = P_0 e^{0,03t}$
 - B. $P(t) = P_0 + 0,03t$
 - C. $P(t) = P_0 e^{-0,03t}$
 - D. $P(t) = 0,03 e^{P_0 t}$
6. Dans l'exercice 1, avec $(E) : y' = y + 2x$, quelle solution particulière de la forme $px + q$ trouve-t-on ?
- A. $y_0(x) = -2x - 2$
 - B. $y_0(x) = -2x$
 - C. $y_0(x) = 2x + 2$
 - D. $y_0(x) = 2x - 2$
7. Dans l'exercice 5 (le café), quelle est la température $T(t)$ en fonction de t ?
- A. $T(t) = 70 + 20e^{-0,1t}$
 - B. $T(t) = 20 + 70e^{-0,1t}$
 - C. $T(t) = 90e^{-0,1t}$
 - D. $T(t) = 20 + 90e^{-0,1t}$
8. Dans l'exercice 6 (radioactivité), quelle est la demi-vie $t_{1/2}$?
- A. 0,05 ans
 - B. $\ln 2$ ans
 - C. $20 \ln 2$ ans, soit environ 13,9 ans
 - D. 20 ans
9. Dans l'exercice 7 (chute avec frottement, $v' = 10 - 0,5v$), quelle est la vitesse limite ?
- A. 0,5 m/s
 - B. 20 m/s
 - C. 10 m/s
 - D. $+\infty$
10. Dans l'exercice 9 (condensateur, $u' = \frac{6-u}{2}$, $u(0) = 0$), quelle est la limite de $u(t)$ en $+\infty$?
- A. $+\infty$
 - B. 0 V
 - C. 6 V
 - D. 2 V