

Fiche 3 : l'équation $y' = ay + f$ et la modélisation

Dix exercices :

- équations avec second membre (polynôme, exponentielle, cas de résonance, cosinus) ;
- les problèmes de modélisation classiques du bac : refroidissement de Newton, radioactivité, chute avec frottement, population avec prélèvement, charge d'un condensateur ;
- l'oscillateur $y'' + \omega^2 y = 0$ en complément.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- équation réduite ;
- solution particulière cherchée sous une forme justifiée et vérifiée ;
- solution générale ;
- condition initiale ;
- interprétation avec les unités.

Le modèle de rédaction avec second membre

« On cherche une solution particulière de la forme $y_0(x) = px + q$.

Alors $y'_0 = p$, et $y'_0 = y_0 + 2x$ équivaut à $p = (p + 2)x + q$ pour tout x .

On identifie : $p + 2 = 0$ et $p = q$, donc $p = q = -2$.

Les solutions de $y' = y$ sont Ce^x .

Les solutions de l'équation sont donc $y(x) = Ce^x - 2x - 2$, avec $C \in \mathbb{R}$. »

- Cherche y_0 de la même forme que le second membre (polynôme du même degré, exponentielle, combinaison de **cos** et **sin**).
- Cas de **résonance** : si le second membre est ke^{ax} , cherche $cx e^{ax}$.
- Solution générale = $Ce^{ax} + y_0(x)$, puis condition initiale.

Les pièges classiques

- Oublier de vérifier la solution particulière dans l'équation.
- Chercher $y_0 = ce^{ax}$ quand le second membre est déjà e^{ax} : il faut $cx e^{ax}$.
- Appliquer la condition initiale à y_0 seule au lieu de la solution générale.
- Donner un résultat de modélisation **sans unité** ni interprétation.

Une solution particulière, c'est comme une clé de secours : tu la cherches parmi celles qui ressemblent à la serrure (le second membre), pas au hasard.

Exercice 1 (★★) : second membre polynomial

On considère $(E) : y' = y + 2x$.

Chercher une solution particulière de la forme $y_0(x) = px + q$. Résoudre (E) . Déterminer la solution vérifiant $y(0) = 0$.

Correction de l'exercice 1**Solution particulière**

$y_0(x) = px + q$ donne $y'_0(x) = p$. y_0 est solution de (E) si et seulement si, pour tout x : $p = px + q + 2x$, c'est-à-dire $(p + 2)x + q - p = 0$.

Cela équivaut à $p + 2 = 0$ et $q - p = 0$. Donc $p = -2$ et $q = -2$.

$$y_0(x) = -2x - 2$$

$$\text{Vérification : } y'_0 = -2 \text{ et } y_0 + 2x = -2x - 2 + 2x = -2$$

Solutions

Les solutions de $y' = y$ sont Ce^x .

$$y(x) = Ce^x - 2x - 2, C \in \mathbb{R}$$

Condition initiale

$$y(0) = C - 2 = 0, \text{ donc } C = 2.$$

$$y(x) = 2e^x - 2x - 2$$

Exercice 2 (★★) : un autre second membre polynomial

Résoudre $(E) : y' = 2y + 3x$. Donner la solution vérifiant $y(0) = 1$.

Correction de l'exercice 2**Solution particulière**

On cherche $y_0(x) = px + q$. $y'_0 = p$ et $2y_0 + 3x = (2p + 3)x + 2q$.

L'égalité pour tout x impose $2p + 3 = 0$ et $p = 2q$, donc $p = -\frac{3}{2}$ et $q = -\frac{3}{4}$.

$$y_0(x) = -\frac{3x}{2} - \frac{3}{4}$$

$$\text{Vérification : } y'_0 = -\frac{3}{2} \text{ et } 2y_0 + 3x = -3x - \frac{3}{2} + 3x = -\frac{3}{2}$$

Solutions

Les solutions de $y' = 2y$ sont Ce^{2x} .

$$y(x) = Ce^{2x} - \frac{3x}{2} - \frac{3}{4}, C \in \mathbb{R}$$

Condition initiale

$$y(0) = 1 \text{ donne } C - \frac{3}{4} = 1, \text{ soit } C = \frac{7}{4}.$$

$$y(x) = \frac{7}{4}e^{2x} - \frac{3x}{2} - \frac{3}{4}$$

Exercice 3 (★★) : second membre exponentiel, dont la résonance

Résoudre :

(a) $y' + y = e^{-x}$

(b) $y' - 2y = e^x$

Pour (b), donner la solution vérifiant $y(0) = 0$.

Correction de l'exercice 3

Question (a)

L'équation s'écrit $y' = -y + e^{-x}$, avec $a = -1$. Le second membre e^{-x} a le même exposant que les solutions de $y' = -y$: c'est un cas de **résonance**.

On cherche $y_0(x) = cxe^{-x}$. $y'_0(x) = ce^{-x} - cxe^{-x}$, donc $y'_0 + y_0 = ce^{-x}$. On veut $ce^{-x} = e^{-x}$, donc $c = 1$.

$$y_0(x) = xe^{-x}$$

Les solutions de $y' = -y$ sont Ce^{-x} .

$$y(x) = (x + C)e^{-x}, C \in \mathbb{R}$$

Question (b)

L'équation s'écrit $y' = 2y + e^x$. Le second membre e^x n'a pas le même exposant que e^{2x} . On cherche $y_0(x) = ce^x$.

$$y'_0 - 2y_0 = ce^x - 2ce^x = -ce^x. \text{ On veut } -ce^x = e^x, \text{ donc } c = -1.$$

$$y_0(x) = -e^x$$

Les solutions de $y' = 2y$ sont Ce^{2x} .

$$y(x) = Ce^{2x} - e^x, C \in \mathbb{R}$$

La condition $y(0) = 0$ donne $C - 1 = 0$, soit $C = 1$.

$$y(x) = e^{2x} - e^x$$

Exercice 4 (★★★) : second membre trigonométrique

Résoudre (E) : $y' + 2y = \cos x$. On cherchera une solution particulière de la forme $y_0(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$.

Correction de l'exercice 4

Solution particulière

$$y_0(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x \text{ donne } y_0'(x) = -\alpha \sin x + \beta \cos x.$$

$$y_0' + 2y_0 = (-\alpha + 2\beta) \sin x + (\beta + 2\alpha) \cos x$$

On veut cette expression égale à $\cos x$ pour tout x . C'est réalisé si :

$$-\alpha + 2\beta = 0$$

$$2\alpha + \beta = 1$$

Alors $\alpha = 2\beta$ et $4\beta + \beta = 1$. Donc $\beta = \frac{1}{5}$ et $\alpha = \frac{2}{5}$.

$$y_0(x) = \frac{2 \cos x + \sin x}{5}$$

Solutions

L'équation s'écrit $y' = -2y + \cos x$. Les solutions de $y' = -2y$ sont Ce^{-2x} .

$$y(x) = Ce^{-2x} + \frac{2 \cos x + \sin x}{5}, C \in \mathbb{R}$$

Exercice 5 (★★) : le refroidissement de Newton

Un café à 90°C est posé dans une pièce à 20°C . La température $T(t)$, en $^\circ\text{C}$, à l'instant t (en minutes), vérifie $T' = -0,1(T - 20)$ et $T(0) = 90$.

1. Écrire l'équation sous la forme $T' = aT + b$ et la résoudre avec la condition initiale.
2. Calculer $T(10)$. Déterminer la limite de T en $+\infty$ et l'interpréter.
3. À quel instant le café atteint-il 40°C ?

Correction de l'exercice 5

Question 1

$T' = -0,1T + 2$, avec $a = -0,1$ et $b = 2$. Donc $-\frac{b}{a} = 20$.

Solutions : $T(t) = Ce^{-0,1t} + 20$. $T(0) = C + 20 = 90$, donc $C = 70$.

$$T(t) = 20 + 70e^{-0,1t}$$

Question 2

$$T(10) = 20 + 70e^{-1}$$

$$T(10) \approx 45,75 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Comme $-0,1 < 0$, $e^{-0,1t} \rightarrow 0$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = 20$$

À long terme, le café atteint la température de la pièce. La fonction T est décroissante :

$$T'(t) = -7e^{-0,1t} < 0.$$

Question 3

$$T(t) = 40 \iff 70e^{-0,1t} = 20 \iff e^{-0,1t} = \frac{2}{7} \iff -0,1t = \ln \frac{2}{7} \iff t = 10 \ln \frac{7}{2}$$

Le café atteint $40 \text{ } ^\circ\text{C}$ au bout de $10 \ln 3,5 \approx 12,5$ minutes.

Exercice 6 (★★) : la radioactivité

Le nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs d'un échantillon, à l'instant t (en années), vérifie $N' = -0,05N$, avec $N(0) = N_0$.

1. Exprimer $N(t)$.

2. Déterminer la demi-vie $t_{1/2}$, c'est-à-dire l'instant où $N(t) = \frac{N_0}{2}$.

3. Au bout de combien de temps il ne reste que 10 % des noyaux initiaux ?

Correction de l'exercice 6

Question 1

Les solutions de $N' = -0,05N$ sont $N(t) = Ce^{-0,05t}$. $N(0) = C = N_0$.

$$N(t) = N_0 e^{-0,05t}$$

Question 2

$$N(t) = \frac{N_0}{2} \iff e^{-0,05t} = \frac{1}{2} \iff -0,05t = -\ln 2 \iff t = \frac{\ln 2}{0,05}$$

$$t_{1/2} = 20 \ln 2 \approx 13,9 \text{ ans (indépendante de } N_0)$$

Question 3

$$N(t) = 0,1 N_0 \iff e^{-0,05t} = 0,1 \iff t = \frac{\ln 10}{0,05} = 20 \ln 10$$

Il ne reste que 10 % des noyaux au bout d'environ 46 ans.

Exercice 7 (★★★) : la chute avec frottement

La vitesse $v(t)$ (en m/s) d'un objet en chute vérifie $v' = 10 - 0,5v$ et $v(0) = 0$.

1. Déterminer $v(t)$.
2. Déterminer la vitesse limite.
3. À quel instant l'objet atteint-il 90 % de sa vitesse limite ?

Correction de l'exercice 7

Question 1

$$v' = -0,5v + 10, \text{ avec } a = -0,5 \text{ et } b = 10. \text{ Donc } -\frac{b}{a} = 20.$$

Solutions : $v(t) = Ce^{-0,5t} + 20$. $v(0) = C + 20 = 0$, donc $C = -20$.

$$v(t) = 20(1 - e^{-0,5t})$$

Question 2

$$e^{-0,5t} \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

La vitesse limite est 20 m/s.

Elle est atteinte quand l'accélération v' s'annule ($10 = 0,5v$).

Question 3

90 % de la vitesse limite vaut 18 m/s.

$$v(t) = 18 \iff 1 - e^{-0,5t} = 0,9 \iff e^{-0,5t} = 0,1 \iff t = 2 \ln 10$$

L'objet atteint 18 m/s au bout de $2 \ln 10 \approx 4,6$ s.

Exercice 8 (★★★) : une population avec prélèvement

Une population de poissons, exprimée en milliers, croît de 5 % par an. 2 000 poissons sont pêchés chaque année. Le modèle est $P' = 0,05P - 2$, où t est en années.

1. Déterminer la solution constante et la solution générale.
2. Étudier P si $P(0) = 50$, puis si $P(0) = 30$. Que se passe-t-il dans chaque cas ?

Correction de l'exercice 8

Question 1

$a = 0,05$ et $b = -2$. La solution constante est $-\frac{b}{a} = 40$.

$$P(t) = 40 + Ce^{0,05t}$$

Question 2

Si $P(0) = 50$: $C = 10$, $P(t) = 40 + 10e^{0,05t}$. Comme $0,05 > 0$, $P(t) \rightarrow +\infty$.

La population croît indéfiniment dans le modèle.

Si $P(0) = 30$: $C = -10$, $P(t) = 40 - 10e^{0,05t}$, strictement décroissante. $P(t) = 0 \iff e^{0,05t} = 4 \iff t = 20 \ln 4 \approx 27,7$.

La population s'éteint au bout d'environ 27,7 ans.

Interprétation : l'équilibre 40 (milliers) est instable. Au-dessus, la population explose ; en dessous, elle disparaît à cause de la pêche.

Exercice 9 (★★) : la charge d'un condensateur

Un condensateur est chargé par une source de tension $E = 6$ V à travers une résistance, avec $RC = 2$ s. La tension $u(t)$ à ses bornes vérifie $u' = \frac{E - u}{RC}$, avec $u(0) = 0$.

1. Déterminer $u(t)$.
2. Calculer $u(2)$ et la limite de u en $+\infty$.
3. À quel instant la tension atteint-elle 5 V ?

Correction de l'exercice 9

Question 1

$$u' = \frac{6 - u}{2} = -0,5u + 3, \text{ avec } a = -0,5 \text{ et } b = 3. \text{ Donc } -\frac{b}{a} = 6.$$

Solutions : $u(t) = Ce^{-t/2} + 6$. $u(0) = C + 6 = 0$, donc $C = -6$.

$$u(t) = 6(1 - e^{-t/2})$$

Question 2

$$u(2) = 6(1 - e^{-1})$$

$$u(2) \approx 3,79 \text{ V}$$

Comme $e^{-t/2} \rightarrow 0$:

$$\lim u = 6 \text{ V}$$

Le condensateur se charge jusqu'à la tension de la source.

Question 3

$$u(t) = 5 \iff 6e^{-t/2} = 1 \iff e^{-t/2} = \frac{1}{6} \iff t = 2 \ln 6$$

La tension atteint 5 V au bout de $2 \ln 6 \approx 3,6$ s.

Exercice 10 (★★★) : l'oscillateur $y'' + \omega^2 y = 0$ (complément)

On admet que les solutions de $y'' + 4y = 0$ sont les fonctions $y(x) = A \cos 2x + B \sin 2x$.

Déterminer la solution vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$. Puis écrire cette solution sous la forme $R \cos(2x - \varphi)$.

Correction de l'exercice 10

Les constantes

$$y(0) = A = 1.$$

$$y'(x) = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x. \quad y'(0) = 2B = 2, \text{ donc } B = 1.$$

$$y(x) = \cos 2x + \sin 2x$$

La forme $R \cos(2x - \varphi)$

D'après la formule d'addition : $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2x + \sin 2x)$, donc $\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

$$y(x) = \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

C'est une oscillation d'amplitude $\sqrt{2}$ et de période π .

Ce qui peut tomber au bac

- Une **équation avec second membre** dont l'énoncé donne la forme de la solution particulière (exercices 1 à 4).
- Un **problème de refroidissement** ou de **décroissance** avec interprétation (exercices 5 et 6).
- Un **problème de vitesse limite** ou de **charge d'un condensateur** (exercices 7 et 9).
- Un **modèle de population** avec prélèvement (exercice 8).
- L'**oscillateur** $y'' + \omega^2 y = 0$ dans certains sujets (exercice 10).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Quelle fonction est une solution particulière de $y' = y + x$?

- A. $y = -x + 1$
- B. $y = x - 1$
- C. $y = -x - 1$ (bonne réponse)
- D. $y = x + 1$

Justification : Pour $y = -x - 1$: $y' = -1$ et $y + x = -x - 1 + x = -1$.

2. Quelles sont toutes les solutions de $y' = y + x$?

- A. $y = Ce^x + x + 1$
- B. $y = Ce^x - x - 1$ (bonne réponse)
- C. $y = Ce^x - x + 1$
- D. $y = Ce^{-x} - x - 1$

Justification : Solution générale de l'équation sans second membre (Ce^x) plus une solution particulière ($-x - 1$).

3. Pour $T' = -k(T - T_e)$ avec $k > 0$, la température T tend vers :

- A. la température extérieure T_e (bonne réponse)
- B. la température initiale
- C. 0
- D. $+\infty$

Justification : La solution est $T(t) = T_e + (T_0 - T_e)e^{-kt}$ et $e^{-kt} \rightarrow 0$.

4. Pour $y' - 3y = e^{2x}$, on cherche une solution $y = ke^{2x}$. Quelle valeur de k ?

- A. -1 (bonne réponse)
- B. 1
- C. $\frac{1}{5}$
- D. $-\frac{1}{5}$

Justification : $2ke^{2x} - 3ke^{2x} = -ke^{2x} = e^{2x}$ donne $k = -1$.

5. Une population vérifie $P' = 0,03 P$ avec $P(0) = P_0$. Alors :

- A. $P(t) = P_0 e^{0,03t}$ (bonne réponse)
- B. $P(t) = P_0 + 0,03t$
- C. $P(t) = P_0 e^{-0,03t}$
- D. $P(t) = 0,03e^{P_0 t}$

Justification : C'est l'équation $y' = ay$ avec $a = 0,03 > 0$: croissance exponentielle.

6. Dans l'exercice 1, avec (E) : $y' = y + 2x$, quelle solution particulière de la forme $px + q$ trouve-t-on ?

- A. $y_0(x) = -2x - 2$ (bonne réponse)
- B. $y_0(x) = -2x$
- C. $y_0(x) = 2x + 2$
- D. $y_0(x) = 2x - 2$

Justification : $y'_0 = p$ et $y_0 + 2x = (p + 2)x + q$; en identifiant $p = (p + 2)x + q \dots$ on résout $p = q$ et $0 = p + 2$, donc $p = -2$ et $q = -2$.

7. Dans l'exercice 5 (le café), quelle est la température $T(t)$ en fonction de t ?

- A. $T(t) = 70 + 20e^{-0,1t}$
- B. $T(t) = 20 + 70e^{-0,1t}$ (bonne réponse)
- C. $T(t) = 90e^{-0,1t}$
- D. $T(t) = 20 + 90e^{-0,1t}$

Justification : Solution constante 20, plus $Ce^{-0,1t}$ avec $T(0) = 20 + C = 90$, donc $C = 70$.

8. Dans l'exercice 6 (radioactivité), quelle est la demi-vie $t_{1/2}$?

- A. 0,05 ans
- B. $\ln 2$ ans
- C. $20 \ln 2$ ans, soit environ 13,9 ans (bonne réponse)
- D. 20 ans

Justification : $N_0 e^{-0,05t} = \frac{N_0}{2} \iff -0,05t = -\ln 2 \iff t = \frac{\ln 2}{0,05} = 20 \ln 2$.

9. Dans l'exercice 7 (chute avec frottement, $v' = 10 - 0,5v$), quelle est la vitesse limite ?

- A. 0,5 m/s
- B. 20 m/s (bonne réponse)
- C. 10 m/s
- D. $+\infty$

Justification : La solution constante (vitesse limite) vérifie $0 = 10 - 0,5v$, donc $v = 20$.

10. Dans l'exercice 9 (condensateur, $u' = \frac{6-u}{2}$, $u(0) = 0$), quelle est la limite de $u(t)$ en $+\infty$?

A. $+\infty$

B. 0 V

C. 6 V (bonne réponse)

D. 2 V

Justification : $u(t) = 6(1 - e^{-t/2})$ et $e^{-t/2} \rightarrow 0$: la tension tend vers 6 V, la tension de la source.