

Fiche 2 : les équations $y' = ay$ et $y' = ay + b$

Dix exercices pour maîtriser les équations différentielles du premier ordre à coefficients constants :

- mise sous forme réduite ;
- solutions générales ;
- condition initiale ;
- retrouver l'équation d'une fonction donnée ;
- comportement à l'infini ;
- tangente ;
- démonstration du théorème ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- équation mise sous la forme $y' = ay + b$;
- a et b identifiés ;
- solution générale écrite avec $C \in \mathbb{R}$;
- condition initiale appliquée à la solution générale ;
- vérification.

Le modèle de rédaction d'une équation différentielle

« L'équation équivaut à $y' = -2y + 4$.

Elle est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -2$ et $b = 4$.

La fonction constante $-\frac{b}{a} = 2$ est solution particulière.

Les solutions sont les fonctions $y(x) = Ce^{-2x} + 2$, avec $C \in \mathbb{R}$.

La condition $y(0) = 5$ donne $C + 2 = 5$, soit $C = 3$.

Donc $y(x) = 3e^{-2x} + 2$. »

- Mets d'abord l'équation sous la forme $y' = ay + b$.
- La solution constante est $-\frac{b}{a}$.
- Applique la condition initiale à la **solution générale**, pour trouver C .

Les pièges classiques

- Lire a et b sans avoir réduit l'équation ($2y' + 6y = 8$ devient $y' = -3y + 4$).
- Écrire $Ce^{ax} + \frac{b}{a}$ au lieu de $-\frac{b}{a}$.
- Oublier « $C \in \mathbb{R}$ » ou remplacer C avant d'avoir la solution générale complète.
- Confondre une solution avec **toutes** les solutions.

Une équation différentielle sans « $+C$ », c'est un menu où l'on ne t'a servi qu'un seul plat : c'est peut-être bon, mais ce n'est pas la carte.

Exercice 1 (★) : l'équation $y' = ay$

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $y' = 3y$
2. $y' = -2y$
3. $2y' + 5y = 0$
4. $y' = 0$

Correction de l'exercice 1

Méthode

Les solutions de $y' = ay$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1

$$a = 3.$$

$$y(x) = Ce^{3x}, C \in \mathbb{R}$$

Question 2

$$a = -2.$$

$$y(x) = Ce^{-2x}, C \in \mathbb{R}$$

Question 3

$$2y' + 5y = 0 \text{ équivaut à } y' = -\frac{5}{2}y. \text{ Donc } a = -\frac{5}{2}.$$

$$y(x) = Ce^{-5x/2}, C \in \mathbb{R}$$

Question 4

$$y' = 0 \text{ correspond à } a = 0.$$

$y(x) = C$: les fonctions constantes.

Exercice 2 (★) : avec une condition initiale

Déterminer la solution de chaque équation vérifiant la condition :

1. $y' = 2y, y(0) = 3$

2. $y' = -y, y(1) = 2$

3. $y' = \frac{y}{2}, y(2) = 1$

Correction de l'exercice 2

Question 1

Les solutions sont $y(x) = Ce^{2x}$. $y(0) = C = 3$.

$$y(x) = 3e^{2x}$$

Question 2

Les solutions sont $y(x) = Ce^{-x}$. $y(1) = Ce^{-1} = 2$, donc $C = 2e$. $y(x) = 2e \times e^{-x}$.

$$y(x) = 2e^{1-x}$$

Question 3

Les solutions sont $y(x) = Ce^{x/2}$. $y(2) = Ce = 1$, donc $C = e^{-1}$.

$$y(x) = e^{x/2-1}$$

Exercice 3 (★) : l'équation $y' = ay + b$

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $y' = 2y + 6$

2. $y' = -3y + 9$

3. $y' + y = 4$

4. $2y' - 4y = 8$

Correction de l'exercice 3

Méthode

Pour $a \neq 0$, les solutions de $y' = ay + b$ sont $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1

$$a = 2, b = 6, -\frac{b}{a} = -3.$$

$$y(x) = Ce^{2x} - 3$$

Question 2

$$a = -3, b = 9, -\frac{b}{a} = 3.$$

$$y(x) = Ce^{-3x} + 3$$

Question 3

$$y' + y = 4 \text{ équivaut à } y' = -y + 4. a = -1, b = 4, -\frac{b}{a} = 4.$$

$$y(x) = Ce^{-x} + 4$$

Question 4

$$2y' - 4y = 8 \text{ équivaut à } y' = 2y + 4. a = 2, b = 4, -\frac{b}{a} = -2.$$

$$y(x) = Ce^{2x} - 2$$

Exercice 4 (★★) : $y' = ay + b$ avec condition initiale

Déterminer la solution vérifiant la condition :

1. $y' = -2y + 4, y(0) = 5$

2. $y' = 0,5y - 1, y(0) = 0$

3. $y' + 3y = 6, y(1) = 0$

Correction de l'exercice 4

Question 1

$$a = -2, b = 4, -\frac{b}{a} = 2. \text{ Solutions : } y(x) = Ce^{-2x} + 2. y(0) = C + 2 = 5, \text{ donc } C = 3.$$

$$y(x) = 3e^{-2x} + 2$$

Question 2

$$a = 0,5, b = -1, -\frac{b}{a} = 2. \text{ Solutions : } y(x) = Ce^{x/2} + 2. y(0) = C + 2 = 0, \text{ donc } C = -2.$$

$$y(x) = 2 - 2e^{x/2}$$

Vérification : $y'(x) = -e^{x/2}$ et $0,5y(x) - 1 = 1 - e^{x/2} - 1 = -e^{x/2}$

Question 3

$y' + 3y = 6$ équivaut à $y' = -3y + 6$. $a = -3$, $b = 6$, $-\frac{b}{a} = 2$. Solutions : $y(x) = Ce^{-3x} + 2$.
 $y(1) = Ce^{-3} + 2 = 0$, donc $C = -2e^3$. $y(x) = 2 - 2e^3e^{-3x}$.

$$y(x) = 2 - 2e^{3-3x}$$

Exercice 5 (★★) : retrouver l'équation

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{2x} - 1$ est solution d'une équation $y' = ay + b$.
 Déterminer a et b .

Correction de l'exercice 5

$$f'(x) = 6e^{2x}.$$

On cherche a et b tels que, pour tout x :

$$6e^{2x} = a(3e^{2x} - 1) + b = 3ae^{2x} - a + b$$

En identifiant : $3a = 6$ et $-a + b = 0$, donc $a = 2$ et $b = 2$.

La fonction f est solution de $y' = 2y + 2$.

$$\text{Vérification : } 2f(x) + 2 = 6e^{2x} - 2 + 2 = 6e^{2x} = f'(x)$$

Exercice 6 (★★★) : démontrer le théorème

1. Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $y' = ay$. En considérant $g(x) = y(x)e^{-ax}$, montrer que $y(x) = Ce^{ax}$.
2. Montrer qu'il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
3. Montrer que si une solution de $y' = ay$ s'annule en un point, elle est nulle sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 6

Question 1

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit.

$$g'(x) = y'(x)e^{-ax} - ay(x)e^{-ax} = (y'(x) - ay(x))e^{-ax} = 0$$

car $y' = ay$.

Donc g est constante sur $\mathbb{R}$: il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $y(x)e^{-ax} = C$ pour tout x .

$$y(x) = Ce^{ax}$$

Question 2

Existence : la fonction exponentielle vérifie $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$.

Unicité : si $f' = f$ et $f(0) = 1$, la question 1 avec $a = 1$ donne $f(x) = Ce^x$. Alors $f(0) = C = 1$, donc $f(x) = e^x$.

L'unique solution est l'exponentielle.

Question 3

D'après la question 1, $y(x) = Ce^{ax}$. Si $y(x_0) = 0$ pour un x_0 , alors $Ce^{ax_0} = 0$. Donc $C = 0$ (une exponentielle ne s'annule pas). Alors $y(x) = 0$ pour tout x .

Une solution de $y' = ay$ est soit identiquement nulle, soit jamais nulle.

Exercice 7 (★★) : équilibre et comportement à l'infini

Pour chacune des équations :

$$(E_1) \quad y' = -2y + 4$$

$$(E_2) \quad y' = 2y + 4$$

déterminer la solution constante, la solution générale, et la limite en $+\infty$ des solutions.

Correction de l'exercice 7

Équation (E_1)

$a = -2$, $b = 4$. La solution constante est $-\frac{b}{a} = 2$ (car $-2 \times 2 + 4 = 0$). Solutions : $y(x) = 2 + Ce^{-2x}$.

Comme $-2 < 0$, $e^{-2x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Toutes les solutions tendent vers 2 : l'équilibre est stable.

Équation (E_2)

$a = 2$, $b = 4$. La solution constante est $-\frac{b}{a} = -2$. Solutions : $y(x) = -2 + Ce^{2x}$.

Comme $2 > 0$, $e^{2x} \rightarrow +\infty$.

Si $C > 0$, $y(x) \rightarrow +\infty$. Si $C < 0$, $y(x) \rightarrow -\infty$. Si $C = 0$, y est constante égale à -2 .

Les solutions s'éloignent de l'équilibre : il est *instable*.

Exercice 8 (★★) : tangente à une solution

Soit f la solution de $y' = y - 2$ vérifiant $f(0) = 3$. Déterminer f , puis l'équation de la tangente à sa courbe au point d'abscisse 0.

Correction de l'exercice 8

La fonction f

$a = 1$, $b = -2$, la solution constante est $-\frac{b}{a} = 2$. Solutions : $y(x) = Ce^x + 2$. $f(0) = C + 2 = 3$, donc $C = 1$.

$$f(x) = e^x + 2$$

$$\text{Vérification : } f'(x) = e^x \text{ et } f(x) - 2 = e^x$$

La tangente en 0

$f(0) = 3$. $f'(0) = e^0 = 1$ (ou $f'(0) = f(0) - 2 = 1$, directement grâce à l'équation). Équation : $y = 3 + 1(x - 0)$.

$$y = x + 3$$

Exercice 9 (★★★) : changement de fonction

On considère :

$$(E) : y' = 2y + 1$$

$$(E_0) : z' = 2z$$

1. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $z = y + \frac{1}{2}$ est solution de (E_0) .

2. En déduire les solutions de (E) , puis la solution vérifiant $y(0) = 0$.

Correction de l'exercice 9

Question 1

Soit y une fonction dérivable et $z = y + \frac{1}{2}$. Alors $z' = y'$.

y est solution de (E)

$$\Longleftrightarrow y' = 2y + 1$$

$$\Longleftrightarrow z' = 2 \left(z - \frac{1}{2} \right) + 1 = 2z$$

$$\Longleftrightarrow z \text{ est solution de } (E_0).$$

Question 2

Les solutions de (E_0) sont $z(x) = Ce^{2x}$. Donc les solutions de (E) sont $y(x) = z(x) - \frac{1}{2}$.

$$y(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{2}, C \in \mathbb{R}$$

La condition $y(0) = 0$ donne $C - \frac{1}{2} = 0$, soit $C = \frac{1}{2}$.

$$y(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2}$$

$$\text{Vérification : } y'(x) = e^{2x} \text{ et } 2y(x) + 1 = e^{2x} - 1 + 1 = e^{2x}$$

Exercice 10 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. La seule solution de $y' = y$ qui s'annule en 0 est la fonction nulle.
2. Si y est solution de $y' = ay$, alors y^2 est solution de $z' = 2az$.
3. Pour $a \neq 0$, l'équation $y' = ay + b$ admet une solution constante.
4. Toutes les solutions de $y' = 2y$ sont croissantes.
5. La somme de deux solutions de $y' = ay + b$ ($b \neq 0$) est solution de la même équation.
6. La somme de deux solutions de $y' = ay$ est solution de $y' = ay$.

Correction de l'exercice 10

Affirmation 1

Les solutions sont Ce^x . $Ce^0 = 0$ impose $C = 0$.

Vrai.

Affirmation 2

$$(y^2)' = 2yy' = 2y(ay) = 2a y^2.$$

Vrai.

Affirmation 3

La fonction constante $-\frac{b}{a}$ est solution : sa dérivée est nulle et $a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = 0$.

Vrai.

Affirmation 4

Les solutions sont Ce^{2x} . Si $C < 0$, la fonction est décroissante (par exemple $-e^{2x}$).

Faux.

Affirmation 5

Si y_1 et y_2 sont solutions : $(y_1 + y_2)' = a(y_1 + y_2) + 2b$. Ce qui est différent de $a(y_1 + y_2) + b$ si $b \neq 0$.

Faux.

Affirmation 6

$(y_1 + y_2)' = ay_1 + ay_2 = a(y_1 + y_2)$.

Vrai.

Ce qui peut tomber au bac sur $y' = ay + b$

- La **résolution** avec mise sous forme réduite (exercices 1 et 3).
- La **solution avec condition initiale** (exercices 2 et 4).
- Une **étude de la solution** : limite, équilibre, tangente (exercices 7 et 8).
- Le **changement de fonction** $z = y + \frac{b}{a}$ (exercice 9).
- La **démonstration** du théorème avec $g(x) = y(x)e^{-ax}$ (exercice 6).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Quelles sont les solutions de $y' = 3y$?

- A. $y = Ce^{3x}$ (bonne réponse)
- B. $y = Ce^{-3x}$
- C. $y = 3e^{Cx}$
- D. $y = Cx^3$

Justification : Les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$.

2. Quelle est la solution de $y' = -2y$ avec $y(0) = 5$?

- A. $y = 5e^{-2x}$ (bonne réponse)
- B. $y = 5e^{2x}$

C. $y = -2e^{5x}$

D. $y = 5 - 2x$

Justification : $y = Ce^{-2x}$ et $y(0) = C = 5$.

3. Quel est l'ensemble des solutions de $y' = 2y + 6$?

A. $y = Ce^{2x} - 3$ (**bonne réponse**)

B. $y = Ce^{2x} + 3$

C. $y = Ce^{-2x} - 3$

D. $y = Ce^{2x} + 6$

Justification : La solution constante vérifie $0 = 2y + 6$, soit $y = -3$. On ajoute Ce^{2x} .

4. Quelle est la solution constante de $y' = -y + 4$?

A. 4 (**bonne réponse**)

B. -4

C. 0

D. $\frac{1}{4}$

Justification : Une constante a une dérivée nulle : $0 = -y + 4$, donc $y = 4$.

5. La solution de $y' = 2y$ vérifiant $y(1) = e^2$ est :

A. $y = e^{2x}$ (**bonne réponse**)

B. $y = 2e^x$

C. $y = e^{x+1}$

D. $y = e^2 e^{2x}$

Justification : $y = Ce^{2x}$ et $y(1) = Ce^2 = e^2$ donne $C = 1$.

6. Dans l'exercice 2, quelle est la solution de $y' = -y$ vérifiant $y(1) = 2$?

A. $y(x) = 2e^{x-1}$

B. $y(x) = 2e^{-x}$

C. $y(x) = 2e^x$

D. $y(x) = 2e^{1-x}$ (**bonne réponse**)

Justification : $y(x) = Ce^{-x}$ et $y(1) = Ce^{-1} = 2$ donne $C = 2e$, donc $y(x) = 2e e^{-x} = 2e^{1-x}$.

7. Dans l'exercice 3, quel est l'ensemble des solutions de $y' + y = 4$ sur $\mathbb{R}$?

A. $y(x) = Ce^{-x}$

B. $y(x) = Ce^{-x} + 4$ (**bonne réponse**)

C. $y(x) = Ce^{-x} - 4$

D. $y(x) = Ce^x + 4$

Justification : C'est $y' = -y + 4$: solution générale Ce^{-x} plus la solution constante 4.

8. Dans l'exercice 5, la fonction $f(x) = 3e^{2x} - 1$ est solution de quelle équation $y' = ay + b$?

A. $y' = 2y + 2$ (bonne réponse)

B. $y' = 2y - 1$

C. $y' = 2y + 1$

D. $y' = 3y - 1$

Justification : $f'(x) = 6e^{2x} = 2(3e^{2x} - 1) + 2 = 2f(x) + 2$: donc $a = 2$ et $b = 2$.

9. Dans l'exercice 7, pour l'équation $y' = -2y + 4$, que dit-on de l'équilibre (la solution constante 2) ?

A. Il n'existe pas d'équilibre

B. Il est instable : les solutions s'en éloignent

C. Il est stable : toutes les solutions tendent vers 2 (bonne réponse)

D. Toutes les solutions sont constantes

Justification : La partie exponentielle Ce^{-2x} tend vers 0 (car $a = -2 < 0$), donc toutes les solutions se rapprochent de la constante 2.

10. Dans l'exercice 9, en posant $z = y + \frac{1}{2}$, l'équation $y' = 2y + 1$ devient $z' = 2z$. Quelle est la solution de $y' = 2y + 1$ vérifiant $y(0) = 0$?

A. $y(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2}$ (bonne réponse)

B. $y(x) = e^{2x}$

C. $y(x) = \frac{e^{2x} + 1}{2}$

D. $y(x) = e^{2x} - \frac{1}{2}$

Justification : $z(x) = Ce^{2x}$ et $z(0) = y(0) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ donne $C = \frac{1}{2}$, donc $y(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}$.