

Fiche 1 : les primitives

Dix exercices pour maîtriser toutes les recherches de primitives du programme :

- primitives usuelles ;
- formes $u'u^n$, $\frac{u'}{u}$, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, $u'e^u$;
- fonctions trigonométriques et linéarisation ;
- identification d'une primitive de la forme $(ax^2 + bx + c)e^x$;
- condition initiale ;
- vérification ;
- décomposition de fractions ;
- vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- intervalle précisé ;
- forme reconnue (u et u' identifiés) ;
- ajustement des constantes ;
- primitive vérifiée par dérivation ;
- « $+C$ » écrit.

Le modèle de rédaction d'une primitive

« Sur I , f est de la forme $u'u^n$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $u'(x) = 2x$. On a $x(x^2 + 1)^4 = \frac{1}{2} \times 2x(x^2 + 1)^4$. Donc les primitives de f sur I sont les fonctions :

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(x^2 + 1)^5}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^5}{10} + C, \text{ avec } C \in \mathbb{R}. »$$

- Précise l'**intervalle** quand il y a un logarithme, une racine ou un dénominateur.
- Identifie u et u' , puis ajuste avec une constante.
- Écris $+C$ si on demande « les primitives », rien si on demande « une primitive ».

Les pièges classiques

- Oublier le facteur constant qui compense u' ($\div 2$, $\div 3$...).
- Écrire $\ln u$ sans vérifier que $u > 0$ sur l'intervalle (sinon $\ln |u|$).
- Primitiver un produit facteur par facteur.
- Oublier « $+C$ ».

Une primitive non vérifiée, c'est une réponse au loto : elle a une chance de tomber juste, et le correcteur le sait.

Exercice 1 (★) : les primitives usuelles

Déterminer les primitives de :

1. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ sur $\mathbb{R}$

2. $g(x) = x^4 - \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$

3. $h(x) = \frac{1}{x} + e^x - \cos x$ sur $]0; +\infty[$

4. $k(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^3}$ sur $]0; +\infty[$

Correction de l'exercice 1

Méthode

On utilise la linéarité des primitives et la table des primitives usuelles. C désigne un réel quelconque.

Question 1

$$F(x) = x^3 - 2x^2 + x + C$$

Question 2

Une primitive de x^4 est $\frac{x^5}{5}$. Une primitive de $-\frac{1}{x^2}$ est $\frac{1}{x}$. Comme $\sqrt{x} = x^{1/2}$, une primitive de $\sqrt{x}$ est $\frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$.

$$G(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{1}{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$$

Question 3

$$H(x) = \ln x + e^x - \sin x + C$$

Question 4

Une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est $2\sqrt{x}$, donc une primitive de $\frac{2}{\sqrt{x}}$ est $4\sqrt{x}$. Puis $\frac{3}{x^3} = 3x^{-3}$ a pour primitive $3 \times \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{3}{2x^2}$.

$$K(x) = 4\sqrt{x} - \frac{3}{2x^2} + C$$

Exercice 2 (★★) : la forme $u'u^n$

Déterminer les primitives de :

1. $f(x) = (2x + 1)^3$ sur $\mathbb{R}$

2. $g(x) = x(x^2 + 1)^4$ sur $\mathbb{R}$

3. $h(x) = \frac{1}{(3x - 1)^2}$ sur $\left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$

4. $k(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$ sur $\mathbb{R}$

Correction de l'exercice 2**Méthode**

On utilise : $u'u^n$ a pour primitive $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ ($n \neq -1$).

Question 1

Avec $u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$: $f(x) = \frac{1}{2} \times 2(2x + 1)^3 = \frac{1}{2}u'u^3$.

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(2x + 1)^4}{4} + C = \frac{(2x + 1)^4}{8} + C$$

Question 2

Avec $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$: $g(x) = \frac{1}{2} \times 2x(x^2 + 1)^4 = \frac{1}{2}u'u^4$.

$$G(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(x^2 + 1)^5}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^5}{10} + C$$

Question 3

Avec $u(x) = 3x - 1 > 0$ sur l'intervalle et $u'(x) = 3$: $h(x) = \frac{1}{3} \times 3u^{-2}$. Une primitive de $u'u^{-2}$ est $\frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{u}$.

$$H(x) = -\frac{1}{3(3x - 1)} + C$$

Question 4

Avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$, $u'(x) = 2x$: $k(x) = \frac{1}{2} \times 2x \times u^{-2}$.

$$K(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{x^2 + 1} \right) + C = -\frac{1}{2(x^2 + 1)} + C$$

Exercice 3 (★★) : les formes $\frac{u'}{u}$ et $\frac{u'}{\sqrt{u}}$

Déterminer une primitive de :

1. $\frac{2x}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$

2. $\frac{1}{3x + 2}$ sur $\left]-\frac{2}{3}; +\infty\right[$

3. $\frac{x}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$

4. $\frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$ sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

5. $\frac{e^x}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$

6. $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ sur $\mathbb{R}$

Correction de l'exercice 3

Méthode

On utilise $\frac{u'}{u} \rightarrow \ln|u|$ et $\frac{u'}{\sqrt{u}} \rightarrow 2\sqrt{u}$.

Question 1

Avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$, $u'(x) = 2x$:

$$F(x) = \ln(x^2 + 1)$$

Question 2

Avec $u(x) = 3x + 2 > 0$ et $u'(x) = 3$: $\frac{1}{3x + 2} = \frac{1}{3} \times \frac{u'}{u}$.

$$F(x) = \frac{1}{3} \ln(3x + 2)$$

Question 3

$$\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

Question 4

Avec $u(x) = 2x + 1 > 0$, $u'(x) = 2$: $\frac{1}{\sqrt{2x + 1}} = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{\sqrt{u}}$. Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$.

$$F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2x + 1} = \sqrt{2x + 1}$$

Question 5

Avec $u(x) = e^x + 1 > 0$, $u'(x) = e^x$:

$$F(x) = \ln(e^x + 1)$$

Question 6

Avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$, $u'(x) = 2x$: $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{\sqrt{u}}$.

$$F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1}$$

Exercice 4 (★★) : la forme $u'e^u$

Déterminer une primitive de :

1. e^{3x-1}
2. xe^{x^2}
3. e^{-x}
4. $(2x + 1)e^{x^2+x}$
5. $\frac{e^{1/x}}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$

Correction de l'exercice 4

Méthode

On utilise $u'e^u \rightarrow e^u$.

Question 1

Avec $u(x) = 3x - 1$, $u'(x) = 3$: $e^{3x-1} = \frac{1}{3}u'e^u$.

$$F(x) = \frac{e^{3x-1}}{3}$$

Question 2

Avec $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$: $xe^{x^2} = \frac{1}{2}u'e^u$.

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

Question 3

Avec $u(x) = -x$, $u'(x) = -1$: $e^{-x} = -u'e^u$.

$$F(x) = -e^{-x}$$

Question 4

Avec $u(x) = x^2 + x$, $u'(x) = 2x + 1$: la fonction est $u'e^u$.

$$F(x) = e^{x^2+x}$$

Question 5

Avec $u(x) = \frac{1}{x}$, $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$: $\frac{e^{1/x}}{x^2} = -u'e^u$.

$$F(x) = -e^{1/x}$$

Exercice 5 (★★) : trigonométrie et linéarisation

Déterminer une primitive de :

1. $\cos(2x + 1)$

2. $\sin(3x)$

3. $\sin x \cos x$

4. $\cos^2 x$

5. $\sin^2 x$

6. $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

Correction de l'exercice 5

Question 1

$\cos(ax + b)$ a pour primitive $\frac{\sin(ax + b)}{a}$.

$$F(x) = \frac{1}{2} \sin(2x + 1)$$

Question 2

$$F(x) = -\frac{1}{3} \cos(3x)$$

Question 3

Avec $u(x) = \sin x$, $u'(x) = \cos x$: $\sin x \cos x = u'u$.

$$F(x) = \frac{1}{2} \sin^2 x$$

Question 4

On linéarise : $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

$$F(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$$

Question 5

On linéarise : $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

$$F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}$$

Question 6

Avec $u(x) = \cos x > 0$ sur l'intervalle, $u'(x) = -\sin x$: $\frac{\sin x}{\cos^2 x} = -\frac{u'}{u^2}$. Une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ est $-\frac{1}{u}$. Donc une primitive de $-\frac{u'}{u^2}$ est $\frac{1}{u}$.

$$F(x) = \frac{1}{\cos x}$$

Exercice 6 (★★★) : identification d'une primitive

- Déterminer a, b, c tels que $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ soit une primitive de $f(x) = (x^2 + x)e^x$ sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer une primitive de $f(x) = xe^{-x}$, de la forme $(ax + b)e^{-x}$.
- Montrer que $x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de $\ln$ sur $]0; +\infty[$.

Correction de l'exercice 6

Question 1

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$F'(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x = (ax^2 + (2a + b)x + b + c)e^x$$

On veut $F'(x) = (x^2 + x)e^x$ pour tout x . Il suffit d'identifier les coefficients :

$$a = 1$$

$$2a + b = 1$$

$$b + c = 0$$

Donc $a = 1, b = -1, c = 1$.

$F(x) = (x^2 - x + 1)e^x$ est une primitive de f .

Question 2

Pour $F(x) = (ax + b)e^{-x}$: $F'(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x} = (-ax + a - b)e^{-x}$.

On veut xe^{-x} : $-a = 1$ et $a - b = 0$, donc $a = -1$ et $b = -1$.

$$F(x) = -(x + 1)e^{-x}$$

Question 3

Soit $G(x) = x \ln x - x$. G est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $G'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$.

Donc G est une primitive de $\ln$.

Exercice 7 (★★) : primitive avec condition initiale

Déterminer la primitive F de f qui vérifie la condition donnée :

1. $f(x) = 2x - 3$, $F(1) = 4$

2. $f(x) = e^{2x}$, $F(0) = 1$

3. $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$, $F(e) = 3$

Correction de l'exercice 7

Question 1

Les primitives de f sont $F(x) = x^2 - 3x + C$. $F(1) = 1 - 3 + C = C - 2 = 4$, donc $C = 6$.

$$F(x) = x^2 - 3x + 6$$

Question 2

$$F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + C. F(0) = \frac{1}{2} + C = 1, \text{ donc } C = \frac{1}{2}.$$

$$F(x) = \frac{e^{2x} + 1}{2}$$

Question 3

$$F(x) = \ln x + C. F(e) = 1 + C = 3, \text{ donc } C = 2.$$

$$F(x) = \ln x + 2$$

Exercice 8 (★★) : vérifier qu'une fonction est une primitive

Montrer que :

1. $F(x) = (x - 1)e^x$ est une primitive de $f(x) = xe^x$ sur $\mathbb{R}$.

2. $H(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$ est une primitive de $h(x) = x \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

3. $K(x) = \ln(1 + e^x)$ est une primitive de $k(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$ sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 8

Méthode

Pour montrer que F est une primitive de f , il suffit de dériver F et de retrouver f .

Question 1

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit. $F'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x = f(x)$.

F est une primitive de f .

Question 2

H est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$H'(x) = x \ln x + \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} - \frac{x}{2} = x \ln x + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x \ln x = h(x)$$

H est une primitive de h .

Question 3

Comme $1 + e^x > 0$, K est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $K'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} = k(x)$.

K est une primitive de k .

Exercice 9 (★★★) : décomposer une fraction

Sur $] -1; +\infty[$, déterminer une primitive de :

1. $\frac{2x+3}{x+1}$
2. $\frac{x}{x+1}$
3. $\frac{x^2}{x+1}$

Correction de l'exercice 9

Méthode

On fait apparaître $\frac{1}{x+1}$, dont une primitive sur $] -1; +\infty[$ est $\ln(x+1)$.

Question 1

$$2x+3 = 2(x+1) + 1 \text{ donc } \frac{2x+3}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}.$$

$$F(x) = 2x + \ln(x+1)$$

Question 2

$$x = (x + 1) - 1 \text{ donc } \frac{x}{x + 1} = 1 - \frac{1}{x + 1}.$$

$$F(x) = x - \ln(x + 1)$$

Question 3

$$x^2 = (x + 1)(x - 1) + 1 \text{ donc } \frac{x^2}{x + 1} = x - 1 + \frac{1}{x + 1}.$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - x + \ln(x + 1)$$

Exercice 10 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ admet une primitive sur $\mathbb{R}$.
2. Une primitive de fg est FG , où F et G sont des primitives de f et g .
3. Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.
4. La primitive s'annulant en 0 d'une fonction paire sur $\mathbb{R}$ est impaire.
5. Si f est positive sur I , toute primitive de f est croissante sur I .
6. Une fonction f a une seule primitive sur I .

Correction de l'exercice 10

Affirmation 1

Théorème d'existence : toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives.

Vrai.

Affirmation 2

Contre-exemple : $f = g = 1$, $F(x) = G(x) = x$. Une primitive de $fg = 1$ est x , mais $FG(x) = x^2$.

Faux.

Affirmation 3

Si F et G sont deux primitives de f sur I , $(F - G)' = f - f = 0$. Donc $F - G$ est constante sur l'intervalle I .

Vrai.

Affirmation 4

Soit F la primitive de f (paire) qui s'annule en 0.

La fonction $x \mapsto -F(-x)$ est dérivable de dérivée $F'(-x) = f(-x) = f(x)$.

C'est aussi une primitive de f , qui s'annule en 0.

Par unicité, $-F(-x) = F(x)$, c'est-à-dire $F(-x) = -F(x)$.

Vrai : F est impaire.

Affirmation 5

Si $F' = f \geq 0$ sur I , F est croissante sur I .

Vrai.

Affirmation 6

Si F est une primitive de f , toutes les fonctions $F + C$ ($C \in \mathbb{R}$) en sont : il y en a une infinité.

Faux.

Ce qui peut tomber au bac sur les primitives

- Des **primitives de formes classiques** $u'u^n$, $\frac{u'}{u}$, $u'e^u$, avec ajustement des constantes (exercices 2, 3, 4).
- La **vérification d'une primitive** par dérivation ou l'**identification** d'une primitive (exercices 6 et 8).
- Une **primitive avec condition initiale** (exercice 7).
- Les **fonctions trigonométriques** avec linéarisation (exercice 5).
- Une **fraction rationnelle** à décomposer (exercice 9).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Quelle est une primitive de $3x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$?

- A. $x^3 + x$ (bonne réponse)
- B. $6x$
- C. $3x^3 + x$
- D. $x^2 + x$

Justification : On dérive : $(x^3 + x)' = 3x^2 + 1$.

2. Quelle est une primitive de e^{2x} sur $\mathbb{R}$?

- A. $\frac{1}{2}e^{2x}$ (bonne réponse)
- B. $2e^{2x}$

C. e^{2x}

D. e^{x^2}

Justification : $\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' = \frac{1}{2} \times 2e^{2x} = e^{2x}.$

3. Quelle est une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$?

A. $\ln x$ (**bonne réponse**)

B. $-\frac{1}{x^2}$

C. $x \ln x$

D. $\frac{1}{x^2}$

Justification : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[.$

4. Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle :

A. **diffèrent d'une constante (bonne réponse)**

B. sont toujours égales

C. ont des dérivées différentes

D. sont toujours proportionnelles

Justification : Si F et G sont deux primitives, $(F - G)' = 0$: $F - G$ est constante sur l'intervalle.

5. Quelle est une primitive de $\cos(3x)$?

A. $\sin(3x)$

B. $-\frac{1}{3} \sin(3x)$

C. $3 \sin(3x)$

D. $\frac{1}{3} \sin(3x)$ (**bonne réponse**)

Justification : $\left(\frac{1}{3} \sin(3x)\right)' = \frac{1}{3} \times 3 \cos(3x).$

6. Dans l'exercice 2, quelle est une primitive de $h(x) = \frac{1}{(3x-1)^2}$?

A. $-\frac{1}{3}(3x-1)$

B. $-\frac{1}{3(3x-1)}$ (**bonne réponse**)

C. $\frac{-1}{(3x-1)}$

D. $\frac{1}{3(3x-1)}$

Justification : On reconnaît la forme $u'u^{-2}$ avec $u = 3x - 1$, $u' = 3$: une primitive de $u'u^{-2}$ est $-u^{-1} = -\frac{1}{3x-1}$, à multiplier par $\frac{1}{3}$.

7. Dans l'exercice 4, quelle est une primitive de xe^{x^2} ?

- A. e^{x^2}
- B. $x^2 e^{x^2}$
- C. $2xe^{x^2}$
- D. $\frac{1}{2}e^{x^2}$ (bonne réponse)

Justification : Forme $u'e^u$ avec $u = x^2$, $u' = 2x$: une primitive de $2xe^{x^2}$ est e^{x^2} , donc de xe^{x^2} c'est $\frac{1}{2}e^{x^2}$.

8. Dans l'exercice 5, quelle est une primitive de $\cos^2 x$?

- A. $\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}$
- B. $\sin x \cos x$
- C. $\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$ (bonne réponse)
- D. $\frac{\sin(2x)}{2}$

Justification : On linéarise : $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$, dont une primitive est $\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$.

9. Dans l'exercice 7, quelle est la primitive F de $f(x) = 2x - 3$ telle que $F(1) = 4$?

- A. $F(x) = x^2 - 3x$
- B. $F(x) = x^2 - 3x + 1$
- C. $F(x) = x^2 - 3x + 6$ (bonne réponse)
- D. $F(x) = x^2 - 3x + 4$

Justification : Les primitives de $2x - 3$ sont $x^2 - 3x + C$; $F(1) = 1 - 3 + C = 4$ donne $C = 6$.

10. Dans l'exercice 9, quelle est une primitive de $\frac{x^2}{x+1}$ sur $] -1 ; +\infty[$?

- A. $\frac{x^3}{3}$
- B. $\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)$ (bonne réponse)
- C. $\frac{x^2}{2} + \ln(x+1)$
- D. $x - \ln(x+1)$

Justification : On effectue la division : $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$, dont une primitive est $\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)$.