

Contrôle : chapitre 7, Primitives et équations différentielles

Durée : 60 minutes. **Calculatrice :** autorisée. **Barème :** 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6 points) : Calculs de primitives

1. Déterminer les primitives sur $]0; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = 6x^2 - \frac{1}{x^2} + \cos(2x)$.
(1,5 points)
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{4x - 2}{x^2 - x + 1}$. Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$, puis déterminer la primitive G de g sur $\mathbb{R}$ telle que $G(1) = 3$. (1,5 points)
3. On pose $F(x) = (x - 1)e^x$. Montrer que F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par $h(x) = xe^x$. (1 point)
4. En déduire la primitive K sur $\mathbb{R}$ de la fonction k définie par $k(x) = (2x + 1)e^x$ vérifiant $K(0) = 2$. (2 points)

Exercice 2 (6 points) : Une équation différentielle et une démonstration

On considère l'équation différentielle $(E) : 3y' - 6y = 12$, d'inconnue y fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$. (2 points)
2. Déterminer l'unique solution f de (E) vérifiant $f(1) = -1$. (1,5 points)
3. Soit a un réel et y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $y' = ay$. On pose, pour tout réel x , $g(x) = y(x)e^{-ax}$. Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}$, puis en déduire qu'il existe un réel C tel que $y(x) = Ce^{ax}$ pour tout réel x . (2,5 points)

Exercice 3 (8 points) : Concentration d'un médicament

Un médicament est administré par voie orale à un patient à l'instant $t = 0$ (t en heures). On note $c(t)$ sa concentration dans le sang, en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$. Pendant que le médicament passe dans le sang, il est aussi éliminé : on admet que c est dérivable sur $[0; +\infty[$, que $c(0) = 0$ et que c est solution de l'équation différentielle

$$(F) : y' + 0,5y = 3e^{-0,2t}.$$

Pour la dernière question, on dispose en Python de la fonction `c` suivante, qui renvoie $c(t)$:

```
from math import exp

def c(t):
    return 10 * (exp(-0.2 * t) - exp(-0.5 * t))
```

1. Vérifier que la fonction c_0 définie sur $[0; +\infty[$ par $c_0(t) = 10e^{-0,2t}$ est une solution de (F) . (1 point)
2. Résoudre l'équation différentielle $y' + 0,5y = 0$, puis en déduire l'expression de $c(t)$. (1,5 points)
3. Déterminer la limite de $c(t)$ quand t tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat. (1 point)
4. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $c'(t) = e^{-0,5t} (5 - 2e^{0,3t})$. Étudier les variations de c sur $[0; +\infty[$, puis donner la concentration maximale, arrondie au centième, ainsi que l'instant, arrondi au centième, où elle est atteinte. (2,5 points)
5. Écrire une fonction `seuil()` qui renvoie le plus petit entier $t \geq 4$ tel que $c(t) < 1$ (on rappelle que c est décroissante sur $[t_m; +\infty[$ avec $t_m < 4$). Donner la valeur renvoyée en justifiant à l'aide de valeurs approchées de $c(11)$ et $c(12)$. (2 points)