

Contrôle : chapitre 7, Primitives et équations différentielles

Durée : 60 minutes. **Calculatrice :** autorisée. **Barème :** 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6 points) : Calculs de primitives

1. Déterminer les primitives sur $]0; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = 6x^2 - \frac{1}{x^2} + \cos(2x)$.
(1,5 points)
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{4x-2}{x^2-x+1}$. Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$, puis déterminer la primitive G de g sur $\mathbb{R}$ telle que $G(1) = 3$. (1,5 points)
3. On pose $F(x) = (x-1)e^x$. Montrer que F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par $h(x) = xe^x$. (1 point)
4. En déduire la primitive K sur $\mathbb{R}$ de la fonction k définie par $k(x) = (2x+1)e^x$ vérifiant $K(0) = 2$. (2 points)

Correction de l'exercice 1, question 1

Question 1 (1,5 points)

On primitive terme à terme sur $]0; +\infty[$: $6x^2$ a pour primitive $2x^3$, $-\frac{1}{x^2}$ a pour primitive $\frac{1}{x}$ et $\cos(2x)$ a pour primitive $\frac{\sin(2x)}{2}$.

Les primitives de f sont les fonctions $x \mapsto 2x^3 + \frac{1}{x} + \frac{\sin(2x)}{2} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Barème : 1 point pour les trois primitives usuelles correctes (dont $\cos(2x)$ avec le facteur $\frac{1}{2}$) ; 0,5 point pour la constante C et la forme générale.

Correction de l'exercice 1, question 2

Question 2 (1,5 points)

Le trinôme $u(x) = x^2 - x + 1$ a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ et un coefficient dominant positif : $u(x) > 0$ pour tout réel x . Ainsi g est définie sur $\mathbb{R}$.

On a $u'(x) = 2x - 1$ donc $g = \frac{2u'}{u}$. Comme $u > 0$ sur $\mathbb{R}$, les primitives de g sont les fonctions $x \mapsto 2 \ln(x^2 - x + 1) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Condition : $G(1) = 2 \ln(1) + C = C = 3$.

$$G(x) = 2 \ln(x^2 - x + 1) + 3.$$

Barème : 0,5 point pour $u > 0$ sur $\mathbb{R}$ justifié ; 0,5 point pour la forme $\frac{2u'}{u}$ et la primitive $2 \ln(u)$; 0,5 point pour la constante grâce à $G(1) = 3$.

Correction de l'exercice 1, question 3

Question 3 (1 point)

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et, pour tout réel x :

$$F'(x) = 1 \times e^x + (x - 1)e^x = xe^x = h(x).$$

Donc F est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

Barème : 0,5 point pour la dérivée de F (formule du produit) ; 0,5 point pour le calcul et la conclusion.

Correction de l'exercice 1, question 4

Question 4 (2 points)

On écrit $k(x) = 2xe^x + e^x = 2h(x) + e^x$.

Une primitive de k est $2F + \exp$, soit $x \mapsto 2(x - 1)e^x + e^x = (2x - 1)e^x$. Les primitives de k sont donc les fonctions $x \mapsto (2x - 1)e^x + C$.

Condition : $K(0) = -1 + C = 2$, d'où $C = 3$.

$$K(x) = (2x - 1)e^x + 3.$$

Barème : 0,5 point pour la décomposition de k ; 1 point pour une primitive de k avec la question précédente ; 0,5 point pour la constante grâce à $K(0) = 2$.

Exercice 2 (6 points) : Une équation différentielle et une démonstration

On considère l'équation différentielle $(E) : 3y' - 6y = 12$, d'inconnue y fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$. (2 points)

2. Déterminer l'unique solution f de (E) vérifiant $f(1) = -1$. (1,5 points)

3. Soit a un réel et y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $y' = ay$. On pose, pour tout réel x , $g(x) = y(x)e^{-ax}$. Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}$, puis en déduire qu'il existe un réel C tel que $y(x) = Ce^{ax}$ pour tout réel x . (2,5 points)

Correction de l'exercice 2, question 1

Question 1 (2 points)

$(E) \iff y' = 2y + 4$, qui est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = 2 \neq 0$ et $b = 4$.

La fonction constante $-\frac{b}{a} = -2$ est solution particulière : sa dérivée est nulle et $2 \times (-2) + 4 = 0$.

Les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto Ce^{2x} - 2$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Barème : 1 point pour la mise sous forme $y' = 2y + 4$; 0,5 point pour la solution particulière -2 vérifiée ; 0,5 point pour la solution générale.

Correction de l'exercice 2, question 2

Question 2 (1,5 points)

Il existe un réel C tel que, pour tout x , $f(x) = Ce^{2x} - 2$.

La condition $f(1) = -1$ s'écrit $Ce^2 - 2 = -1$, soit $C = e^{-2}$.

$f(x) = e^{-2}e^{2x} - 2 = e^{2x-2} - 2$.

Vérification : $f(1) = e^0 - 2 = -1$.

Barème : 0,5 point pour la condition appliquée en $x = 1$ à la solution générale ; 0,5 point pour la valeur $C = e^{-2}$; 0,5 point pour l'expression simplifiée de f .

Correction de l'exercice 2, question 3

Question 3 (2,5 points)

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et, pour tout réel x :

$$g'(x) = y'(x)e^{-ax} + y(x) \times (-ae^{-ax}) = (y'(x) - ay(x))e^{-ax} = 0 \text{ car } y' = ay.$$

La dérivée de g est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc g est constante : il existe un réel C tel que $g(x) = C$ pour tout x .

Alors $y(x) = g(x)e^{ax}$ (car $e^{-ax}e^{ax} = 1$), soit :

$$y(x) = Ce^{ax} \text{ pour tout réel } x.$$

Barème : 1 point pour le calcul de g' avec la formule du produit ; 0,5 point pour $g' = 0$ sur un intervalle donc g constante ; 1 point pour le retour à $y(x) = Ce^{ax}$.

Exercice 3 (8 points) : Concentration d'un médicament

Un médicament est administré par voie orale à un patient à l'instant $t = 0$ (t en heures). On note $c(t)$ sa concentration dans le sang, en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$. Pendant que le médicament passe dans le sang, il est aussi éliminé : on admet que c est dérivable sur $[0; +\infty[$, que $c(0) = 0$ et que c est solution de l'équation différentielle

$$(F) : y' + 0,5y = 3e^{-0,2t}.$$

Pour la dernière question, on dispose en Python de la fonction c suivante, qui renvoie $c(t)$:

```
from math import exp

def c(t):
    return 10 * (exp(-0.2 * t) - exp(-0.5 * t))
```

1. Vérifier que la fonction c_0 définie sur $[0; +\infty[$ par $c_0(t) = 10e^{-0,2t}$ est une solution de (F) . (1 point)
2. Résoudre l'équation différentielle $y' + 0,5y = 0$, puis en déduire l'expression de $c(t)$. (1,5 points)
3. Déterminer la limite de $c(t)$ quand t tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat. (1 point)
4. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $c'(t) = e^{-0,5t} (5 - 2e^{0,3t})$. Étudier les variations de c sur $[0; +\infty[$, puis donner la concentration maximale, arrondie au centième, ainsi que l'instant, arrondi au centième, où elle est atteinte. (2,5 points)
5. Écrire une fonction `seuil()` qui renvoie le plus petit entier $t \geq 4$ tel que $c(t) < 1$ (on rappelle que c est décroissante sur $[t_m; +\infty[$ avec $t_m < 4$). Donner la valeur renvoyée en justifiant à l'aide de valeurs approchées de $c(11)$ et $c(12)$. (2 points)

Correction de l'exercice 3, question 1

Question 1 (1 point)

$$c'_0(t) = 10 \times (-0,2)e^{-0,2t} = -2e^{-0,2t}.$$

Donc $c'_0(t) + 0,5 c_0(t) = -2e^{-0,2t} + 5e^{-0,2t} = 3e^{-0,2t}$.

c_0 est bien solution de (F) .

Barème : 0,5 point pour la dérivée de c_0 ; 0,5 point pour le calcul et la conclusion.

Correction de l'exercice 3, question 2

Question 2 (1,5 points)

$y' + 0,5y = 0 \iff y' = -0,5y$: les solutions sont les fonctions $t \mapsto Ke^{-0,5t}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

Une fonction est solution de (F) si et seulement si sa différence avec c_0 est solution de $y' + 0,5y = 0$. Les solutions de (F) sont donc les fonctions $t \mapsto Ke^{-0,5t} + 10e^{-0,2t}$.

Condition : $c(0) = K + 10 = 0$, d'où $K = -10$.

$c(t) = 10(e^{-0,2t} - e^{-0,5t})$.

Barème : 0,5 point pour les solutions de l'équation sans second membre ; 0,5 point pour la solution générale de (F) (homogène + particulière) ; 0,5 point pour $K = -10$ avec $c(0) = 0$ et l'expression de c .

Correction de l'exercice 3, question 3

Question 3 (1 point)

Comme $-0,2 < 0$ et $-0,5 < 0$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,2t} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,5t} = 0$.

Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) = 0$: à long terme, le médicament est totalement éliminé du sang.

Barème : 0,5 point pour la limite justifiée ; 0,5 point pour l'interprétation.

Correction de l'exercice 3, question 4

Question 4 (2,5 points)

$c'(t) = 10(-0,2e^{-0,2t} + 0,5e^{-0,5t}) = -2e^{-0,2t} + 5e^{-0,5t}$.

Or $e^{-0,2t} = e^{-0,5t} \times e^{0,3t}$, d'où $c'(t) = e^{-0,5t}(5 - 2e^{0,3t})$.

Comme $e^{-0,5t} > 0$, le signe de $c'(t)$ est celui de $5 - 2e^{0,3t}$: $5 - 2e^{0,3t} > 0 \iff e^{0,3t} < \frac{5}{2} \iff t < \frac{10}{3} \ln \frac{5}{2}$ (croissance de $\ln$). On note $t_m = \frac{10}{3} \ln \frac{5}{2} \approx 3,05$.

x	0		t_m		$+\infty$
$c'(t)$		+	0	-	
c	0	$\nearrow$	$c(t_m)$	$\searrow$	0

Le maximum de c est atteint pour $t = t_m$. On a $e^{0,3t_m} = \frac{5}{2}$, donc $e^{-0,5t_m} = \frac{2}{5}e^{-0,2t_m}$ et $c(t_m) = 10e^{-0,2t_m} \left(1 - \frac{2}{5}\right) = 6e^{-0,2t_m} \approx 3,26$.

La concentration maximale vaut environ $3,26 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$, atteinte environ $3,05$ heures après la prise.

Barème : 0,5 point pour la dérivée et la forme factorisée demandée ; 1 point pour le signe de c' (résolution de l'inéquation) ; 0,5 point pour le tableau de variations complet (limites ou valeurs aux bornes) ; 0,5 point pour $t_m \approx 3,05$ et $c(t_m) \approx 3,26$.

Correction de l'exercice 3, question 5

Question 5 (2 points)

On part de $t = 4$ (où $c(4) \approx 3,14 > 1$) et on augmente t d'une heure tant que $c(t) \geq 1$:

```
def seuil():
    t = 4
    while c(t) >= 1:
        t = t + 1
    return t
```

Comme c est décroissante sur $[4; +\infty[$, la boucle s'arrête au premier entier t tel que $c(t) < 1$. On a $c(11) \approx 1,07 \geq 1$ et $c(12) \approx 0,88 < 1$.

`seuil()` renvoie **12** : à l'heure entière près, la concentration est devenue inférieure à $1 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$ au bout de 12 heures, pas avant 11 heures.

*Barème : 1 point pour la boucle `while` avec initialisation $t = 4$, condition $c(t) \geq 1$ et incrémentation ; 0,5 point pour le `return` et la valeur **12** ; 0,5 point pour la justification par $c(11)$ et $c(12)$.*

Récapitulatif du barème

Exercice	Points
Exercice 1	6
Exercice 2	6
Exercice 3	8
Total	20